Ueber

die Transformationen einer quadratischen Form in sich selbst,

mit vorzüglicher Berücksichtigung der uneigentlichen,

sowie

ihre Anwendungen auf Linien- und Kugelgeometrie.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen philosophischen Facultät der Königl. bayerischen Ludwig-Maximilians-Universität zu München vorgelegt

von

Alfred Loewy aus **Rawitsch.**

Separat-Abzug aus: Nova Acta der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. LXV.

HALLE.

1895.

Buchdruckerei der Dr. Güntz'schen Stiftung vormals E. Blochmann & Sohn in Dresden.

Ueber

die Transformationen einer quadratischen Form in sich selbst,

mit vorzüglicher Berücksichtigung der uneigentlichen,

sowie

ihre Anwendungen auf Linien- und Kugelgeometrie.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen philosophischen Facultät der Königl. bayerischen Ludwig-Maximilians-Universität zu München vorgelegt

von

Alfred Loewy aus **Rawitsch.**

Separat-Abzug aus: Nova Acta der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. LXV.

HALLE.

1895.

Buchdruckerei der Dr. Güntz'schen Stiftung vormals E. Blochmann & Sohn in Dresden.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn

Professor Dr. **F. Lindemann**

als

schwaches Zeichen tiefgefühlten Dankes

gewidmet

vom Verfasser.

Inhalt.

		Seite
	Einleitung	5
§ 1.	Die eigentlichen Transformationen, welche sich in der von Herrn Frobenius gefundenen Gestalt ergeben	8
§ 2.	Weitere eigentliche und die uneigentlichen Transformationen	13
§ 3.	Die Elimination der Grössen u in den Formeln des § 2	18
§ 4.	Ueber Formen, die gleichzeitig mit der gegebenen quadratischen Form in sich transformirt werden	23
§ 5.	Die Plücker'sche Liniengeometrie und die Correlationen	29
§ 6.	Die zu den aufgestellten Correlationen gehörigen in sich übergehenden Complexe	39
§ 7.	Die Darboux'sche Kugelgeometrie und die Transformation durch reciproke Radien	44
§ 8.	Die bei einer Transformation durch reciproke Radien, welche mit Bewegung verbunden ist, in sich übergehenden Elemente	54
§ 9.	Die conformen Punkttransformationen, welche die Punkte der unendlich fernen Ebene in sich überführen	56
§ 10.	Zusammenhang zwischen Darboux'scher Kugel- und Plücker'scher Liniengeometrie, sowie die Transformationen eines linearen Liniencomplexes in sich	60
§ 11.	Die Lie'sche Kugelgeometrie und die Berührungstransformationen	62

Die Transformation einer quadratischen Form in sich selbst ist schon Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen, zieht sie doch unsere Aufmerksamkeit nicht nur aus algebraischen Gründen, sondern auch wegen ihrer geometrischen Anwendbarkeit auf sich. Hervorgegangen ist dieses Problem aus dem der orthogonalen Substitutionen, welches sich bekanntlich damit beschäftigt, die Coefficienten der linearen Transformation:

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\xi_k;$$

für $i = 1, 2 \ldots n$ so zu bestimmen, dass

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i^2$$

wird. Nachdem Herr Cayley in seiner berühmten Abhandlung[1]): „Sur quelques propriétés des déterminants gauches“ diese Frage zu einem gewissen Abschluss gebracht hatte, stellte sich als erster Herr Hermite im 47. Bande des Crelle'schen Journals die hiermit im engsten Zusammenhange stehende Aufgabe, eine quadratische Form unter Beschränkung auf 3 Variable in sich zu transformiren. Man hat daher eine derartige Transformation als Hermite'sche Substitution[2]) bezeichnet. Anknüpfend an die Arbeit von Hermite sind fernere Untersuchungen von Herrn Cayley zu nennen. Theils behandeln dieselben unsere Transformation algebraisch, theils bringen sie dieselbe mit Polygonen, welche einer Fläche zweiten Grades ein- und umschrieben sind, in Verbindung.[3]) Weitere Arbeiten über diesen Gegenstand sind von Bach-

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. 32, p. 119 ff.

[2]) Rosanes: Crelle's Journal, Bd. 80, p. 53. — Voss: Math. Annalen, Bd. 13, p. 320.

[3]) Cayley: On the homographic transformation of a surface of the second order into itself. The collected mathematical papers: Vol. II, p. 105—112, 133—137. Sur la transformation d'une fonction quadratique en elle-même par des substitutions linéaires, sowie im Anschluss hieran: Recherches ultérieures sur les déterminants gauches. Coll. math. papers: Vol. II, p. 192—215, oder Crelle's Journal, Bd. 50. A memoir on the automorphic linear transformation of a bipartite quadric function. Coll. math. papers: Vol. II, p. 497—505. Vergl. Voss: Ueber die cogredienten Transformationen u. s. w., p. 4.

mann, Journal von Crelle, Bd. 71, 76, Selling, ebenda, Bd. 77, sowie von Rosanes, ebenda, Bd. 80. Herr Rosanes untersucht den Charakter und die Eigenthümlichkeiten der Hermite'schen Transformation in eingehender Weise, jedoch stellt er keine expliciten Transformationsformeln auf. Die bisherigen Arbeiten sind sämmtlich insofern unbefriedigend, als sie nicht jede mögliche Transformation mit Nothwendigkeit geben, dieselbe nicht unmittelbar auffinden lehren und nicht die Ausnahmefälle betrachten, welche die allgemeinen Resultate erleiden können. In befriedigender Weise wurde das Problem für die symmetrischen und alternirenden bilinearen Formen erst 1877 von Herrn Frobenius in Crelle's Journal, Bd. 84, in der bekannten Abhandlung: „Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen" gelöst. Anknüpfend hieran sind in den Abhandlungen der Königl. bayer. Akademie der Wissenschaften die Untersuchungen von Herrn A. Voss: „Ueber die cogredienten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst"[1]) erschienen. In dieser Arbeit werden die Resultate des Herrn Frobenius weiter entwickelt und auf den allgemeinsten Fall einer beliebigen bilinearen Form ausgedehnt. Schliesslich sei noch einer Arbeit von Herrn Voss: „Ueber orthogonale Substitutionen", Math. Annalen XIII, p. 320—374, gedacht. — In den oben genannten Abhandlungen sind für uneigentliche Transformationen keine allgemeinen Formeln gegeben.[2])

Die Herren Frobenius[3]) wie Voss[4]) schliessen in ihren Arbeiten bei der Aufstellung allgemeiner Transformationsformeln uneigentliche Transformationen ausdrücklich aus. Herr Lindemann hat in den „Vorlesungen über Geometrie unter besonderer Benützung der Vorträge von Clebsch" für uneigentliche Transformationen bei symmetrischen bilinearen Formen von 3 und 4 Variablen wohl zum ersten Male allgemeine Formeln gegeben.[5]) Auf

---

[1]) II. Cl., XVII. Bd., II. Abtheilung, p. 237—356.

[2]) Cayley leitet uneigentliche Transformationen ab, indem er zu den n Variablen eine $n+1$te t hinzufügt und für diese $t = -t'$ substituirt, so ist die für $n+1$ Variable eigentliche Substitution, für n Variable uneigentlich.

[3]) Frobenius: Crelle's Journal, Bd. 84, p. 38.

[4]) Voss: Ueber die cogredienten Transformationen u. s. w., p. 74 und p. 111.

[5]) Clebsch-Lindemann: Bd. II, 1, p. 366—368.

Veranlassung desselben habe ich in der vorliegenden Arbeit versucht, diese Formeln auf eine quadratische Form von beliebig vielen Variablen auszudehnen und Anwendungen der erhaltenen Formeln zu geben.

Im ersten Theile dieser Arbeit werde ich zunächst durch Betrachtung der quadratischen Form von n Variablen als einer $n-2$fachen Mannigfaltigkeit im $n-1$ dimensionalen Raum Formeln für eigentliche wie uneigentliche Transformationen entwickeln. Die im § 1 gegebenen Formeln sind die allgemeinen Frobenius'schen Formeln für eigentliche Transformationen. Die eigentlichen Substitutionen des § 2 entziehen sich dieser Darstellung; es sind jene Transformationen, die Herr Frobenius nur durch Grenzübergang aus seinen allgemeinen Formeln gefunden hat. Die hier für sie gegebene Darstellung durch Einführung von Hilfsvariablen, ebenso wie die Formeln für uneigentliche Transformationen scheinen über Bekanntes hinauszugehen; ich erlaube mir daher besonders auf die zusammenfassenden Resultate p. 23 zu verweisen. Im Weiteren unterziehe ich die zuletzt gefundene Gattung eigentlicher, sowie die uneigentlichen Transformationen einer näheren Betrachtung, gebe bei der Transformation festbleibende Elemente, sowie gleichzeitig in sich übergehende quadratische Formen an.

Im zweiten Theile geben wir Anwendungen der Hermite'schen Transformation, unter vorzüglicher Berücksichtigung der uneigentlichen, auf geometrische Fragen. Wir besprechen die Correlationen des Linienraumes, indem wir die uneigentlichen Transformationen aufstellen, welche die quadratische Bedingungsgleichung der Plücker'schen Liniencoordinaten in sich transformiren. Dann behandeln wir den Fall der Hermite'schen Transformation bei fünf Variablen und interpretiren ihn geometrisch, d. h. wir betrachten einerseits vom Standpunkte der Darboux'schen Kugelgeometrie die Transformationen des Punktraumes durch reciproke Radien und Bewegungen, andererseits infolge der Abbildung des Punktraumes auf einen linearen Liniencomplex die Transformation des letzteren in sich. Schliesslich zeigen wir noch in Kürze die Anwendbarkeit der Hermiteschen Transformation auf Lie'sche Kugelgeometrie.

§ 1.

Die eigentlichen Transformationen, welche sich in der von Herrn Frobenius gefundenen Gestalt ergeben.

Wenn eine lineare Substitution:

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik}\,\xi_k$$

für $i = 1, 2 \ldots n$ die quadratische Form

$$\sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k (i = 1, 2, \ldots n,\ k = 1, 2 \ldots n)$$

in sich transformirt, so ist:

$$\sum_i \sum_k a_{ik}\, x_i\, x_k = \sum_i \sum_k a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k .$$

Man unterscheidet derartige Transformationen bekanntlich, je nachdem die Determinante der Transformation $+1$ oder -1 ist, in eigentliche und uneigentliche. Wir leiten zunächst Formeln für eigentliche Transformationen her, und insbesondere diejenigen, die zuerst Herr Frobenius bestimmt hat.

Wir denken uns einen Raum von $n-1$ Dimensionen; jeder Punkt desselben wird durch n homogene Coordinaten $x_1\, x_2 \ldots x_n$ festgelegt. Wir bezeichnen diesen Raum R_{n-1}; eine Anzahl von ν Gleichungen scheidet aus dem R_{n-1} eine Mannigfaltigkeit aus, die immer noch $n-\nu-1$ Dimensionen hat; wir bezeichnen sie als eine $M_{n-\nu-1}$. Rechts oben dem M beigesetzte Indices mögen die Grade der ν Gleichungen angeben, durch welche die $M_{n-\nu-1}$ bestimmt ist.[1]) Im R_{n-1} sei eine $M^{(2)}_{n-2}$ durch die Gleichung

$$f(x) \equiv \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, x_i\, x_k = 0 ;$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$ ist, gegeben; im Folgenden sei stets angenommen, dass die Determinante dieser quadratischen Form nicht verschwindet. Wir suchen solche lineare Transformationen:

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik}\,\xi_k ,$$

für $i = 1, 2 \ldots n$, dass

$$\sum_i \sum_k a_{ik}\, x_i\, x_k = \sum_i \sum_k a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k$$

wird. Wir interpretiren uns x_i und ξ_i als die n homogenen Coordinaten von

[1]) F. Klein, Math. Annalen V, p. 258.

zwei Punkten unserer $M_{n-2}^{(2)}$; t_i und τ_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ seien die Coordinaten von zwei weiteren Punkten im R_{n-1}, diese mögen auf der Verbindungsgeraden der zwei Punkte mit den Coordinaten x_i und ξ_i sich befinden und mit diesen harmonisch liegen, so ist:

1)
$$x_i = k t_i + \lambda \tau_i \quad ^{1})$$
$$\xi_i = k t_i - \lambda \tau_i .$$

Wenn zwischen den t und τ lineare Gleichungen bestehen, so kann man aus ihnen auch lineare Gleichungen zwischen x und ξ finden. Sucht man nun zwischen den t und τ in allgemeinster Weise lineare Gleichungen, die analytisch ihr Verhältniss als konjugirte Punkte der $M_{n-2}^{(2)}$ angeben, so kann man hieraus lineare Transformationen zwischen x und ξ finden, dass $\sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k$ in $\sum_i \sum_k a_{ik} \xi_i \xi_k$ übergeführt wird. Statt t führen wir seine Polarmannigfaltigkeit $M_{n-2}^{(1)}$ mit den Coordinaten u_i ein, so ist:

2)
$$t_i = \sum_1^n{}_k A_{ik} u_k ;$$

hierbei sind die A_{ik} die Unterdeterminanten der aus den a_{ik} gebildeten Determinante. Der Punkt τ muss als zu t conjugirt auf der $M_{n-2}^{(1)}$ u liegen, daher ist: $\sum_{i=1}^{i=n} \tau_i u_i = 0$. Dieser Bedingung genügt man in allgemeinster Weise, indem man die τ zu den u mittelst der durch einen linearen Complex im R_{n-1} begründeten Verwandtschaft in Beziehung setzt. Es sei daher:

3)
$$\tau_i = \alpha_{i1} u_1 + \alpha_{i2} u_2 + \ldots + \alpha_{in} u_n ;$$

hierbei sind die α_{ik} ein System von $\frac{n(n-1)}{2}$ willkürlichen Grössen, für die $\alpha_{ii} = 0$; $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$ ist.

Setzt man die in 2) und 3) erhaltenen Werthe für t_i und τ_i in 1) ein, so erhält man:

4)
$$x_i = k \sum_1^n{}_k A_{ik} u_k + \lambda \sum_1^n{}_k \alpha_{ik} u_k ,$$
$$\xi_i = k \sum_1^n{}_k A_{ik} u_k - \lambda \sum_1^n{}_k \alpha_{ik} u_k .$$

Aus diesen $2n$ linearen Gleichungen sind noch die u zu eliminiren. Bezeichnet man die aus den Grössen $k A_{ik} + \lambda \alpha_{ik}$ gebildete Determinante mit

---

[1]) Dieser Weg, den wir für den R_{n-1} einschlagen, ist zuerst von Herrn Lindemann, Clebsch II, 1, p. 356 für den R_3 und die Transformation einer Fläche 2. Grades in sich befolgt worden.

$\triangle(k,\lambda)$, und ebenso die aus den $kA_{ik}-\lambda\alpha_{ik}$ gebildete Determinante mit $\triangle(k,-\lambda)$, ferner die Unterdeterminanten mit $\triangle_{ik}(k,\lambda)$ bezüglich $\triangle_{ik}(k,-\lambda)$, so ergiebt die Auflösung der Gleichungen 4) nach den u:

5)
$$\triangle(k,\lambda)\,u_i = \sum_{k=1}^{k=n}\triangle_{ki}(k,\lambda)\,x_k,$$
$$\triangle(k,-\lambda)\,u_i = \sum_{k=1}^{k=n}\triangle_{ki}(k,-\lambda)\,\xi_k.$$

Hieraus folgt:

6)
$$\triangle(k,\lambda)\sum_1^n A_{mi}u_i = \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n}\triangle_{ki}(k,\lambda)\,x_k A_{mi}$$
$$\triangle(k,-\lambda)\sum_1^n A_{mi}u_i = \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n}\triangle_{ki}(k,-\lambda)\,\xi_k A_{mi}.$$

Nun ist nach 4):

$$\sum_1^n A_{ik}u_k = \frac{1}{2k}(x_i+\xi_i);$$

daher gehen die Gleichungen 6) über in:

7)
$$\triangle(k,\lambda)\,\xi_m = 2k\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n}\triangle_{ki}(k,\lambda)\,A_{mi}x_k-\triangle(k,\lambda)\,x_m,$$

8)
$$\triangle(k,-\lambda)\,x_m = 2k\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n}\triangle_{ki}(k,-\lambda)\,A_{mi}\xi_k-\triangle(k,-\lambda)\,\xi_m.$$

Wir können daher folgendes Resultat aussprechen:

Die Transformation

$$x_m = \sum_{k=1}^{k=n} c_{mk}\xi_k \text{ für } m = 1, 2\ldots n,$$

wo

$$c_{mk} = \frac{2k\sum_1^n \triangle_{ki}(k,-\lambda)\,A_{mi}}{\triangle(k,-\lambda)} \text{ für } m \gtrless k$$

und

$$c_{mm} = \frac{2k\sum_{i=1}^{i=n}\triangle_{mi}(k,-\lambda)\,A_{mi}-\triangle(k,-\lambda)}{\triangle(k,-\lambda)}$$

führt

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}a_{ik}x_ix_k \text{ in } \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}a_{ik}\xi_i\xi_k$$

über.

Schon aus der Herleitung geht das zuletzt ausgesprochene Resultat hervor, denn jeder Punkt der $M_{n-2}^{(2)}$ geht sicher in einen Punkt der $M_{n-2}^{(2)}$ über. Es könnte aber bei der Ueberführung der quadratischen Form noch ein constanter Factor hinzutreten. Eine leichte Rechnung ergiebt, dass das Letztere nicht statt hat.

Aus 4) folgt:

$$\sum_{l=1}^{l=n} a_{lm}\xi_l = k\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{l=1}^{l=n} A_{lk}a_{lm}u_k - \lambda\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{l=1}^{l=n}\alpha_{lk}a_{lm}u_k .$$

Nun ist:

$$\sum_{l=1}^{l=n} A_{lk}a_{lm} = \delta_k^m A, \text{ wo } \delta_k^m = 0 \text{ für } k \gtrless m,\ \delta_m^m = 1 .$$

Daher wird:

$$\sum_{l=1}^{l=n} a_{lm}\xi_l = kAu_m - \lambda\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{l=1}^{l=n}\alpha_{lk}a_{lm}u_k ;$$

ebenso ergiebt sich:

$$\sum_{l=1}^{l=n} a_{lm}x_l = kAu_m + \lambda\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{l=1}^{l=n}\alpha_{lk}a_{lm}u_k .$$

Durch Addition folgt:

$$\sum_{l=1}^{l=n} a_{lm}\xi_l + \sum_{l=1}^{l=n} a_{lm}x_l = 2kAu_m .$$

Daher ist:

$$\sum_{l=1}^{l=n} a_{lm}x_l = 2kAu_m - \sum_{l=1}^{l=n} a_{lm}\xi_l ,$$

$$\sum_{l=1}^{l=n} a_{lm}\xi_l = 2kAu_m - \sum_{l=1}^{l=n} a_{lm}x_l .$$

Aus diesen zwei Gleichungen ergiebt sich:

$$\sum_{l=1}^{l=n}\sum_{m=1}^{m=n} a_{lm}x_lx_m = 2kA\sum_{m=1}^{m=n}u_mx_m - \sum_{l=1}^{l=n}\sum_{m=1}^{m=n} a_{lm}\xi_lx_m ,$$

$$\sum_{l=1}^{l=n}\sum_{m=1}^{m=n} a_{lm}\xi_l\xi_m = 2kA\sum_{m=1}^{m=n}u_m\xi_m - \sum_{l=1}^{l=n}\sum_{m=1}^{m=n} a_{lm}x_l\xi_m .$$

Durch Subtraction dieser zwei Gleichungen folgt, da $a_{lm} = a_{ml}$ ist,

$$\sum_{l=1}^{l=n}\sum_{m=1}^{m=n} a_{lm}x_lx_m - \sum_{l=1}^{t=n}\sum_{m=1}^{m=n} a_{ln}\xi_l\xi_m = 2kA\left(\sum_{m=1}^{m=n}u_mx_m - \sum_{m=1}^{m=n}u_m\xi_m\right).$$

Aus 5) ergiebt sich:

$$\triangle(k,\lambda)\sum_{m=1}^{m=n}u_m\xi_m = \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{m=1}^{m=n}\triangle_{km}(k,\lambda)\,x_k\xi_m ,$$

$$\triangle(k,-\lambda)\sum_{m=1}^{m=n}u_mx_m = \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{m=1}^{m=n}\triangle_{km}(k,-\lambda)\,x_m\xi_k .$$

Beachtet man nun, dass $\alpha_{ii} = 0$ und $\alpha_{ki} = -\alpha_{ik}$ ist, so sieht man, dass in den zwei Determinanten $\triangle(k,\lambda)$ und $\triangle(k,-\lambda)$ nur Zeilen und Colonnen vertauscht sind, daher ist

$$\triangle(k,\lambda) = \triangle(k,-\lambda);\quad \triangle_{ik}(k,\lambda) = \triangle_{ki}(k,-\lambda) .$$

Folglich ist

$$\sum_{m=1}^{m=n}u_mx_m = \sum_{m=1}^{m=n}u_m\xi_m ,$$

mithin

$$\sum_{l=1}^{l=n}\sum_{m=1}^{m=n} a_{lm}x_l x_m = \sum_{l=1}^{l=n}\sum_{m=1}^{m=n} a_{lm}\xi_l \xi_m .$$

Unsere Transformation ist also eine Hermite'sche.

Bei einer Hermite'schen Transformation: $x_i = \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik}\xi_k$ kann man, wenn man die x_i als homogene Coordinaten eines Punktes interpretirt, nach Punkten fragen, die mit ihren zugeordneten zusammenfallen; man erhält sie, wenn man $x_i = \xi_i \varrho$ setzt. Für Betrachtung derartiger Punkte ist daher die Gleichung:

$$\Sigma \pm (c_{11}-\varrho)(c_{22}-\varrho)(c_{33}-\varrho)\ldots(c_{nn}-\varrho) = 0$$

von Wichtigkeit. Man nennt diese Gleichung die charakteristische Gleichung der Transformation. Von ihr gilt der wichtige Satz des Herrn Frobenius:[1])

Damit eine Substitution geeignet sei, eine quadratische Form von nicht verschwindender Determinante in sich selbst zu transformiren, ist nothwendig und hinreichend, dass die Elementartheiler ihrer charakteristischen Function paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe verschwinden mit Ausnahme derer, die für den Werth $+1$ oder -1 verschwinden und einen ungeraden Exponenten haben.

Bei einer eigentlichen (uneigentlichen) Transformation ist die Anzahl der Wurzeln $\varrho = -1$ immer eine gerade (ungerade). Bei einer uneigentlichen Transformation und geradem n sind $\varrho = \pm 1$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung.[2])

Wir zeigen noch, dass die von uns gefundene Klasse von Transformationen eigentliche sind, d. h.

$$\Sigma \pm c_{11}c_{22}\ldots c_{nn} = +1.$$

Multiplicirt man:

$$\Sigma \pm (c_{11}-\varrho)(c_{22}-\varrho)\ldots(c_{nn}-\varrho)$$

nach dem Determinantengesetz für die Multiplication mit $\triangle(k,\lambda)$ und beachtet hierbei die Werthe der c nach p. 10 und die Relation:

$$2k\sum_{k=l}^{k=n}\sum_{i=l}^{i=n} \triangle_{ki} A_{li}(kA_{km} + \lambda\alpha_{km}) = 2kA_{lm}\triangle,$$

[1]) Frobenius, Crelle's Journal 84, p. 41.

[2]) Ib. p. 35.

so findet man:

$$\triangle(k,\lambda)\,.\,\Sigma\pm\Sigma(c_{11}-\varrho)(c_{22}-\varrho)\,..\,(c_{nn}-\varrho) = \triangle(k(1-\varrho),-\lambda(1+\varrho).$$

Ist also $\frac{k_1}{\lambda_1}$ eine Lösung von $\triangle(k,\lambda) = 0$, so findet man eine Lösung von $\Sigma\pm(c_{11}-\varrho)(c_{22}-\varrho)\,..\,c_{nn}-\varrho) = 0$ aus

$$-\frac{k_1}{\lambda_1} = \frac{k(1-\varrho)}{\lambda(1+\varrho)};$$

daher

$$\varrho = \frac{k\lambda_1 + \lambda k_1}{k\lambda_1 - \lambda k_1}.$$

Setzt man $\varrho = 0$, so sieht man, es wird $\Sigma\pm c_{11}c_{21}\,..\,c_{nn} = +1$.[1])

Um die verschiedenen möglichen Fälle dieser eigentlichen Transformationen zu discutiren, hat man im R_{n-1} alle möglichen Lagen eines linearen Complexes gegen die $M_{n-2}^{(2)}$ oder das Verhalten der Wurzeln von $\triangle(k,\lambda) = 0$ zu betrachten.

§ 2.

Weitere eigentliche und die uneigentlichen Transformationen.

Bisher hatten wir die t nicht in ihrer Variabilität beschränkt. Die Gleichungen 2) und 3) des § 1 (p. 9) enthalten die Forderung, dass die t und τ durch auflösbare Gleichungen von nicht verschwindender Determinante verknüpft seien. Es kann aber zwischen den t und τ die Relation:

$$t_i = l_{i1}\tau_1 + l_{i2}\tau_2 + \,..\, + l_{in}\tau_n,\; i = 1,2,\,..\,n$$

statthaben, wo $|l_{ik}| = 0$ ist; in diesem Falle wird das Gleichungssystem nur für solche Werthe der τ_i auflösbar, für welche die t_i einer linearen Gleichung genügen, d. h. die t sind nicht mehr wie im § 1 beliebig variabel, sondern müssen eine lineare Mannigfaltigkeit $M_{n-2}^{(1)}$ v des R_{n-1} erfüllen; es ist also $\sum_{i=1}^{i=n} t_i v_i = 0$. Man kann dann alle Punkte t als Pole einer beliebigen linearen Mannigfaltigkeit u in Bezug auf ein beliebiges in der linearen Mannigfaltigkeit v gelegenes quadratisches Gebilde auffassen; als solches wählen wir die $M_{n-3}^{(2,1)}$, welche $f = 0$ und $v = 0$ bestimmen. Die Gleichung dieses Gebildes in Ebenencoordinaten findet man auf folgende Art: In dem Büschel $(u+\sigma v)$ giebt es eine Berührungsmannigfaltigkeit an die

---

[1]) Diese eigentlichen Transformationen und die für dieselben p. 10 aufgestellten Formeln hat Herr Frobenius: Crelle's Journal 84, p. 37 auf ganz anderem Wege gefunden.

$M_n - {}^{(2)}_{2}\, f$; ihre Coordinaten müssen, wenn x den Berührungspunkt bezeichnet, den Bedingungen genügen:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = u_i + \sigma v_i \text{ für } i = 1, 2 \ldots n,$$
$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n = 0,$$
$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + \ldots + v_n x_n = 0.$$

Durch Elimination findet man die Gleichung des Gebildes in der Form:

$$1) \qquad \varphi \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & u_1 & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & u_2 & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & u_3 & v_3 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & u_n & v_n \\ u_1 & u_2 & u_3 & \ldots & u_n & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & \ldots & v_n & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Punkt t ist der Pol einer beliebigen Mannigfaltigkeit u in Bezug auf φ; daher ist:

$$t_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}.$$

Der Punkt τ ist conjugirt zu t, er liegt daher auf einer linearen Mannigfaltigkeit w, die zu der v Ebene conjugirt ist; sonach müssen die Coordinaten der w Mannigfaltigkeit der Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} v_i w_k = 0$$

genügen.

Zu einem bestimmten Punkt t gehört als Punkt τ ein Punkt des Schnittes von w mit der Polarmannigfaltigkeit von t; die letztere geht aber stets durch den Pol η von v, den auch w enthält; ferner muss die Polarmannigfaltigkeit auch durch den Schnitt von v und u gehen; folglich liegt τ auf der M_{n-3}, welche η und die Schnittmannigfaltigkeit der drei linearen Mannigfaltigkeiten v, w, u bestimmen. Es handelt sich noch darum, den von u, v, w bestimmten Schnitt analytisch darzustellen. Man hat zu diesem Zwecke ein System von $n-3$ unabhängigen Lösungen der drei Gleichungen:

$$2) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} u_i x_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i x_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} w_i x_i = 0,$$

aufzusuchen und diese mit willkürlichen Constanten zu componiren. Man findet im Allgemeinen auf folgendem Wege $n-3$ unabhängige Lösungssysteme: Man setze in den drei Gleichungen von Anfang an $n-4$ Variable Null und berechne aus den drei Gleichungen die noch auftretenden vier Unbekannten; so hat man ein erstes Werthsystem. Dann setze man $n-4$ andere Variable Null, so findet man im Allgemeinen ein vom ersten verschiedenes Werthsystem. Auf diese Art sind $n-3$ unabhängige Lösungssysteme

$$\begin{array}{cccccc} \zeta_1^1 & \zeta_2^1 & \zeta_3^1 & \cdot & \cdot & \zeta_n^1 \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 & \zeta_3^2 & \cdot & \cdot & \zeta_n^2 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \zeta_1^{n-3} & \zeta_2^{n-3} & \zeta_3^{n-3} & \cdot & \cdot & \zeta_n^{n-3} \end{array}$$

zu finden, so dass nicht sämmtliche Determinanten, welche man aus dieser Matrix von $n.(n-3)$ Grössen bilden kann, verschwinden. Dann wird

$$\tau_i = \sigma\eta_i + \varrho^1\zeta_i^1 + \varrho^2\zeta_i^2 + \ldots \varrho^{n-3}\zeta_i^{n-3}$$

für $i = 1, 2, 3 \ldots n$, wo die Grössen $\varrho^1\ \varrho^2 \ldots \varrho^{n-3}$ und σ Proportionalitätsfactoren sind.

Es ergiebt sich

$$x_i = \frac{k}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} + \nu\eta_i + \sum_{j=1}^{j=n-3} k^{(j)}\zeta_i^{(j)},$$

$$\xi_i = \frac{k}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} - \nu\eta_i - \sum_{j=1}^{j=n-3} k^{(j)}\zeta_i^{(j)}$$

für $i = 1, 2 \ldots n$; hierbei ist φ durch 1) und die Grössen ζ aus dem Gleichungssysteme 2) bestimmt. Es ist

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{k=n} A_{ik}\, v_k$$

und v und w sind zwei beliebige Mannigfaltigkeiten, die nur durch

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k\ \ 1}^{k=n} A_{ik}\, v_i\, w_k = 0$$

verknüpft sind. Die v Ebene darf jedoch nicht Tangentialmannigfaltigkeit an f sein, sonst werden unsere Ueberlegungen illusorisch. k und $k^{(j)}$ sind willkürliche Constanten; es sei noch bemerkt, dass entsprechend dem invariantentheoretischen Charakter der Transformation die Grösse ν wie φ und ζ eine Function von u ist.

Unsere Aufgabe wird noch die Elimination der u sein; diese behalten wir uns für den folgenden Paragraphen vor, wo wir auch nachweisen, dass die hier gefundene Klasse von Transformationen uneigentliche sind.[1])

Der bis jetzt betrachtete Fall ist noch nicht der allgemeinste. Es ist ja möglich, dass die Punkte t nicht auf eine einzige, sondern auf den Schnitt von m linearen Mannigfaltigkeiten im R_{n-1} beschränkt sind; sie erfüllen dann eine $M_{n-1-m}^{(1,1,\ldots 1)}$, welche durch die Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} v_1^{(1)} t_1 + v_2^{(1)} t_2 + \ldots v_n^{(1)} t_n &= 0 \\ v_1^{(2)} t_1 + v_2^{(2)} t_2 + \ldots v_n^{(2)} t_n &= 0 \\ &\vdots \\ v_1^{(j)} t_1 + v_2^{(j)} t_2 + \ldots v_n^{(j)} t_n &= 0 \\ &\vdots \\ v_1^{(m)} t_1 + v_2^{(m)} t_2 + \ldots v_n^{(m)} t_n &= 0 \end{aligned}$$

bestimmt ist.

In diesem Falle kann man die t als Pole einer beliebigen Mannigfaltigkeit u in Bezug auf ein beliebiges quadratisches Gebilde, das auf der $M_{n-m-1}^{(1,1,1\ldots 1)}$ liegt, ansehen. Als solches wählen wir die $M_{n-m-2}^{(2,1,1\ldots 1)}$, welche f und die m linearen Mannigfaltigkeiten $v^{(j)}$ bestimmen. Die Gleichung dieses Gebildes in Ebenencoordinaten findet man auf folgende Art: In der linearen Mannigfaltigkeitsschaar $(u + \sum_1^m \sigma^j v^j)$ giebt es eine Tangentialmannigfaltigkeit an die $M_{n-2}^{(2)}: f$; wenn x den Berührungspunkt bezeichnet, so finden folgende Relationen statt:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots a_{1n} x_n &= \sigma_1 v_1^{(1)} + \sigma_2 v_1^{(2)} + \ldots + \sigma_m v_1^{(m)} + u_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= \sigma_1 v_2^{(1)} + \sigma_2 v_2^{(2)} + \ldots \sigma_m v_2^{(m)} + u_2, \\ &\vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n &= \sigma_1 v_n^{(1)} + \sigma_2 v_n^{(2)} + \ldots \sigma_m v_n^{(m)} + u_n, \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n &= 0, \\ v_1^{(1)} x_1 + v_2^{(1)} x_2 + \ldots + v_n^{(1)} x_n &= 0, \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad\qquad \vdots \\ v_1^{(m)} x_1 + v_2^{(m)} x_2 + \ldots + v_n^{(m)} x_n &= 0. \end{aligned}$$

[1]) Für den Fall $n=3$ und $n=4$ gehen diese Formeln in die des Herrn Lindemann über: Clebsch II, **1**, p. 366 und p. 385 über. Allgemeine Formeln, wie die hier aufgestellten, scheinen sonst nicht für uneigentliche Transformationen gegeben zu sein. Herr Voss: Ann. XIII, p. 343, hat Sätze über die Zerlegung uneigentlicher Transformationen angegeben.

Durch Elimination findet man die Gleichung der $M_{n-m-2}^{(2,1,1\ldots1)}$ in Ebenencoordinaten:

$$\text{B)} \qquad \varphi \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & u_1 & v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & \ldots & v_1^{(m)} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & u_2 & v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & \ldots & v_2^{(m)} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} & u_3 & v_3^{(1)} & v_3^{(2)} & \ldots & v_3^{(m)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & u_n & v_n^{(1)} & v_n^{(2)} & \ldots & v_n^{(m)} \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \ldots & v_n^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ v_1^{(m)} & v_2^{(m)} & \ldots & v_n^{(m)} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

t ist der Pol von φ in Bezug auf eine beliebige Mannigfaltigkeit u; daher:

$$t_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}.$$

Der Punkt τ ist conjugirt zu t, er liegt daher auf einer linearen Mannigfaltigkeit w, die zu allen $v^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots m)$ conjugirt ist; daher müssen die Coordinaten der w Mannigfaltigkeit den m Gleichungen

$$\sum_i \sum_k A_{ik} v_i^{(j)} w_k = 0$$

für $j = 1, 2 \ldots m$ genügen.

Zu einem bestimmten Punkt t gehört also als Punkt τ ein Punkt der Schnittmannigfaltigkeit von w mit der Polarmannigfaltigkeit von t; die letztere geht aber stets durch die m Pole $\eta^{(j)}$ von den $v^{(j)}$, die auch auf w liegen; ferner muss die Polarmannigfaltigkeit auch durch den Schnitt von den $v^{(j)}$ mit u gehen, folglich liegt τ auf der M_{n-3}, welche durch die m Pole $\eta^{(j)}$ und durch eine mittels der Gleichungen:

$$\text{C)} \qquad \begin{aligned} \Sigma u_i x_i &= 0, \\ \Sigma v_i^{(j)} x_i &= 0, \; j = 1, 2 \ldots m, \\ \Sigma w_i x_i &= 0 \end{aligned}$$

bestimmte M_{n-m-3} gebildet wird.

Man hat die Gleichungen C) in allgemeinster Weise aufzulösen; man bestimme also $n-m-2$ unabhängige Lösungssysteme $\zeta^{(l)}$, wo $l = 1, 2 \ldots n-m-2$; dann ist:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{j=m} \nu^{(j)} \eta_i^{(j)} + \sum_{l=1}^{l=n-m-2} \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)};$$

hierbei sind die $\sigma^{(l)}$ und $\nu^{(j)}$ willkürliche Constanten, die $\eta_i^{(j)}$ als Pole von $v^{(j)}$ sind bestimmt durch:

D) $$\eta_i^{(j)} = \sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} v_k^{(j)}; \; j = 1, 2 \ldots m.$$

Es ergiebt sich schliesslich:

$$x_i = \frac{k}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} + \sum_j \nu^{(j)} \eta_i^{(j)} + \sum_l \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)},$$

$$\xi_i = \frac{k}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} - \sum_j \nu^{(j)} \eta_i^{(j)} - \sum_l \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)}.$$

Die Function φ ist durch B), die $\eta_i^{(j)}$ werden durch D) gegeben, die $\zeta^{(l)}$ sind unabhängige Lösungssysteme von C); die Grössen $\sigma^{(l)}$ und k sind willkürliche Constanten. Entsprechend dem invariantentheoretischen Charakter der Transformation sind die $\nu^{(j)}$ Functionen von u.

Unsere Aufgabe wird noch die Elimination der u aus den gefundenen Gleichungen sein; wir behalten sie uns für den folgenden Paragraphen vor. Wenn wir die Elimination geleistet haben, so haben wir Transformationsformeln zwischen den x_i und ξ_i, diese führen sicher $\sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k$ in $\sum_i \sum_k a_{ik} \xi_i \xi_k$ über, denn gemäss der Herleitung der Formeln führen sie die $M_{n-2}^{(2)} f$ in sich über; es könnte etwa nur ein constanter Factor hinzutreten. Dass dies nicht der Fall ist, kann man folgern, weil es bei den im § 1 aufgestellten Formeln nicht statt hat und für die t in diesem Paragraphen nur eine Beschränkung in der Variabilität eingeführt wurde. Auch unsere weiter aufgestellten Transformationen für specielle Fälle erhärten dies.

§ 3.

Die Elimination der Grössen u in den Formeln des § 2.

Wir hatten das Gleichungssystem:

$$x_i = \frac{k}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} + \sum_j \nu^{(j)} \eta_i^{(j)} + \sum_l \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)}$$

$$\xi_i = \frac{k}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} - \sum_j \nu^{(j)} \eta_i^{(j)} - \sum_l \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)}$$

für $i = 1 \ldots n$; aus diesen $2n$ Gleichungen sind die u_i wie die $\nu^{(j)}$ zu eliminiren.

m Gleichungen, in denen keine u auftreten, verschafft man sich auf folgende Art: Bildet man $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} v_i^{(j)}$ für irgend einen Index j, so ist dies eine Determinante mit zwei gleichen Reihen und als solche Null, daher:

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i v_i^{(j)} = -\sum_{i=1}^{i=n} \xi_i v_i^{(j)}$$

für $j = 1, 2 \ldots m$.

w ist das Polargebilde zu allen $v^{(j)}$; daher enthält es alle $\eta^{(j)}$; ferner sind die $\zeta^{(l)}$ Lösungssysteme von $\Sigma w_i x_i = 0$ (p. 17); folglich ergiebt sich als $m+1^{\text{te}}$ Gleichung ohne u:

$$\sum_{i=1}^{i=n} w_i x_i = \sum_{i=1}^{i=n} w_i \xi_i .$$

Noch weitere $n-m-1$ lineare Gleichungen zwischen den x und ξ, die frei von den u sind, findet man auf folgende Weise: ω sei eine Ebene, welche durch die m Punkte $\eta^{(j)}$, sowie durch den Pol der w Ebene geht, dann ist:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \omega_i \eta_i^{(j)} = 0 \quad j = 1, 2 \ldots m$$

und

$$\sum_{i=1}^{i=n} \omega_i \varepsilon_i = 0 ,$$

wenn ε der Pol von w ist. Daher findet man:

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i \omega_i = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \omega_i + \sum_l \sum_i \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)} \omega_i ,$$

$$\sum_i \xi_i \omega_i = \frac{k}{2} \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \omega_i - \sum_l \sum_i \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)} \omega_i .$$

Nun ist:

1) $$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \omega_i = 0$$

die Bedingung, dass u durch den Pol von ω in Bezug auf die $M_{n-m-2}^{(2,1,1\ldots1)}\ \varphi = 0$ gehen soll.

2) $$\sum_i \sum_l \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)} \omega_i = 0$$

kann als eine Bedingungsgleichung aufgefasst werden, die aussagt, dass ein bestimmter fester Schnittpunkt der $m+2$ Mannigfaltigkeiten $v^{(j)}$, w, u auf ω liegt (hierbei sind $\sigma^{(l)}$ feste, aber willkürliche Constante). Wir specialisiren jetzt unsere ω Mannigfaltigkeit, die bisher nur $m+1$ Bedingungen zu genügen brauchte der Art, dass:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \omega_i = \varrho \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{l=1}^{=n-m-2} \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)} \omega_i$$

wird, wo ϱ eine von u unabhängige, sonst beliebige Constante ist. In diesem Falle bedeuten 1) und 2) dasselbe. Als erste Consequenz dieser Specialisirung ergiebt sich, dass ω Tangentialebene an die $M_{n-m-2}^{(2,1\ldots1)}\ \varphi = 0$ in einem

Punkte, der auf w liegt, sein muss, denn 2) sagt aus: u schneidet ω in einem auf den $v^{(l)}$ und w gelegenen Schnittpunkte; 1) sagt aus: u geht durch den Pol von ω in Bezug auf die $M_{n-m-2}^{(2,1\ldots1)}\varphi = 0$; daher berührt ω die $M_{n-m-2}^{(2,1\ldots1)}\varphi = 0$, da ω seinen Pol enthält. Weil ω durch den Pol von w geht, so findet die Berührung in einem auf w gelegenen Punkte statt. Aus dem hier Gesagten ergiebt sich aber, dass, obgleich die Coordinaten von ω nach der Wahl von ω, da diese Ebene schon anfänglich $m+1$ Bedingungen genügt, nur $n-m-1$ fach willkürlich sind, man doch die Coordinaten der Ebene ω so finden kann, dass:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \omega_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \varrho \sum_i \sum_l \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)}$$

wird, trotzdem die letztere Bedingung scheinbar für die ω, falls man die Coefficienten jedes u_i rechts und links gleichsetzt, n Bedingungen implicirt. Das ist eine Folge davon, dass die neue Bedingung die alte enthält.

Ersetzt man die n Grössen $\omega_1 \ldots \omega_n$, zwischen denen $m+1$ Bedingungen bestehen, durch $n-m-1$ unabhängige Grössen $\tilde{\omega}_i$, so wird man rechts und links $n-m-1$ gleiche lineare Aggregate von u schreiben können; durch Gleichsetzung entsprechender Aggregate findet man $n-m-1$ lineare Gleichungen der Form:

$$\sum_{i=1}^{i=n-m-1} c_i \tilde{\omega}_i = \varrho \sum c_i' \tilde{\omega}_i.$$

Durch Elimination der $\tilde{\omega}$ findet man eine Gleichung $n-m-1^{\text{ten}}$ Grades für ϱ und entsprechend den $n-m-1$ Wurzeln dieser Gleichung für ϱ ergeben sich in eindeutiger Weise $n-m-1$ verschiedene Tangentialmannigfaltigkeiten ω.[1] Für diese gilt, wenn ω_i die Coordinaten einer dieser Ebenen sind:

$$\sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \omega_i = \varrho \sum_i \sum_l \zeta_i^{(l)} \sigma^{(l)} \omega_i,$$

wo ϱ von u unabhängig ist.

Daher wird:

$$\sum_i \omega_i x_i = \sum_i \omega_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \left(k + \frac{1}{\varrho}\right),$$

$$\sum_i \omega_i \xi_i = \sum_i \omega_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \left(k - \frac{1}{\varrho}\right),$$

folglich:

$$\sum \omega_i x_i = \frac{k+\gamma}{k-\gamma} \sum \omega_i \xi_i,$$

wenn $\frac{1}{\varrho} = \gamma$ gesetzt wird.

[1]) In speciellen Fällen können Wurzeln ϱ der Gleichung zusammenfallen.

Seien die $n-m-1$ Tangentialebenen, welche zu den $m+1$ Ebenen $v^{(j)}$ und w conjugirt liegen und deren eindeutige Bestimmung wir gezeigt haben, mit $\omega^{(1)}\,\omega^{(2)}\ldots\omega^{(n-m-1)}$ und die zugehörigen Constanten mit $\gamma^1\gamma^2\ldots\gamma^{n-m-1}$ bezeichnet, so hat man:

$$\sum_i \omega_i^{(p)} x_i = \frac{k+\gamma_p}{k-\gamma_p} \sum_i \omega_i^{(p)} \xi_i$$

für $p = 1, 2 \ldots n-m-1$.

Es ist ferner:

$$\sum_i v_i^{(j)} x_i = -\sum_i v_i^{(j)} \xi_i$$

für $j = 1, 2 \ldots m$

$$\sum_i w_i x_i = \sum_i w_i \xi_i .$$

Aus diesen n linearen Gleichungen kann man die x_i als lineare Functionen der ξ_i finden.

Hat man ein Gleichungssytem:

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{k=n} b_{ik} \xi_k$$

für $i = 1, 2, 3 \ldots n_1$ und findet durch Auflösung:

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik} \xi_k$$

für $i = 1, 2 \ldots n$, so ist die Determinante der c_{ik} gleich der Determinante der b_{ik} dividirt durch die Determinante der a_{ik}. In unserem Falle ergiebt sich daher die Substitutionsdeterminante für die Transformationen der Form:

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik} \xi_k$$

für $i = 1, 2 \ldots n$ als

$$(-1)^m \prod_{p=1}^{p=n-m-1} \frac{k+\gamma_p}{k-\gamma_p} .$$

Wir haben es mit Hermite'schen Transformationen zu thun, bei diesen ist die Substitutionsdeterminante stets $+1$ oder -1; daher muss $\prod_{p=1}^{p=n-m-1} \frac{k+\gamma_p}{k-\gamma_p}$ entweder $+1$ oder -1 sein.

Dieses Product ist aber der Quotient

$$\frac{k^{n-m-1} + (\gamma_1+\gamma_2+\ldots)\,k^{n-m-2} + \cdots \qquad + \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-m-1}}{k^{n-m-1} - (\gamma_1+\gamma_2+\ldots)\,k^{n-m-2} + \ldots (-1)^{n-m-1}\,\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-m-1}},$$

hierbei ist k eine ganz willkürliche Grösse; dieser Quotient kann nicht für jedes k den Werth -1 haben; er muss daher $+1$ sein und zwischen den γ müssen die Relationen:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{n-m-1} = 0,$$
$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3\gamma_4 + \ldots = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

statthaben, d. h. die Summen aller ungeraden Combinationen der γ müssen verschwinden.

Daher ist die Substitutionsdeterminante $(-1)^m$.

Beschränkt man also die t in ihrer Variabilität auf eine ungerade Anzahl von Ebenen, so erhält man Formeln für uneigentliche Transformationen. Für gerades m erhalten wir weitere eigentliche Transformationen, die von denen des § 1 verschieden sind. Die im § 1 gegebenen Formeln gehen bei einer orthogonalen Substitution in die berühmten Cayley'schen [1]) über; sie sind auf einem anderen als dem von uns eingeschlagenen Wege von Herrn Frobenius [2]) gefunden worden, und derselbe hat für sie den Satz bewiesen, dass sie jede Hermite'sche Transformation darstellen, deren charakteristische Gleichung nicht die Wurzel -1 hat. Es besteht nun folgender Satz [3]):

Beschränkt man die t auf m Ebenen, so hat die charakteristische Gleichung für die Transformation die $m$fache Wurzel -1.

Daher sind die weiteren eigentlichen Transformationen, die wir fanden, so beschaffen, dass ihre charakteristische Gleichung -1 eine gerade Anzahl mal als Wurzel enthält. Diese Transformationen hat Herr Frobenius [4]) durch Grenzübergang aus den eigentlichen des § 1 gewonnen, in den von uns aufgestellten Formeln ist kein Grenzübergang vorzunehmen, dafür aber, um explicite Transformationsformeln zu erhalten, die Elimination der eingeführten Hilfsvariabeln. Für die Rechnung bei speciellen Transformationen dürften sich die hier gegebenen Formeln bequemer gestalten.

Zusammenfassend können wir folgendes Resultat aussprechen:

Eine quadratische Form $\sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k$ von nicht verschwindender Determinante wird in sich übergeführt:

[1]) Cayley, Crelle's Journal, Bd. 32, p. 119 flg.
[2]) Frobenius, Crelle's Journal, Bd. 84, p. 37.
[3]) Den Beweis dieses Satzes geben wir p. 26.
[4]) Crelle's Journal, Bd. 84, p. 44.

a) eigentlich:

1) durch die Cayley-Frobenius'schen Formeln des § 1, p. 10.

2) durch die Transformationsformeln, die sich durch Elimination der u aus dem Gleichungssystem:

$$x_i = -\frac{k}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} + \sum_j \nu^{(j)} \eta_i^{(j)} + \sum_{l=1}^{l=n-m-2} \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)},$$

$$\xi_i = \frac{k}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} - \sum_j \nu^{(j)} \eta_i^{(j)} - \sum_l \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)}$$

für $i = 1, 2, 3 \ldots n$ zwischen den x_i und ξ_i ergeben, falls m eine gerade Zahl $= 2p$ ist; man kann nach Herrn Frobenius die Formeln 2) aus 1) durch Grenzübergang finden.

b. uneigentlich:

Durch die Transformationsformeln, die sich durch Elimination der u aus dem Gleichungssystem:

$$x_i = \frac{k}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} + \sum_j^{j=m} \nu^{(j)} \eta_i^{(j)} + \sum_l \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)},$$

$$\xi_i = \frac{k}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} - \sum_j^{j=1} \nu^{(j)} \eta_i^{(j)} - \sum_l \sigma^{(l)} \zeta_i^{(l)}$$

zwischen den x_i und ξ_i ergeben, falls m eine ungerade Zahl $= 2p - 1$ ist.

Die Zahl m giebt die Anzahl der Wurzeln -1 der charakteristischen Gleichung der Transformation an.

§ 4.

Ueber Formen, die gleichzeitig mit der gegebenen quadratischen Form in sich transformirt werden.

Bei einer jeden allgemeinen linearen Transformation gehen bekanntlich n verschiedene lineare Formen bis auf die constanten Factoren $\varrho^1 \varrho^2 \ldots \varrho^s \ldots \varrho^n$, welche die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind, in die ihnen entsprechenden über. Man kann diese Formen leicht angeben. Die bei der Transformation festbleibenden Punkte sind bestimmt durch:

$$1) \qquad x_i = \varrho \xi_i = \sum_k c_{ik} \xi_k,$$

für $i = 1, 2 \ldots n$.

Bei Betrachtung dieser Punkte ist die charakteristische Gleichung von Wichtigkeit; seien die den Wurzeln $\varrho^1 \varrho^2 \ldots \varrho^s \ldots \varrho^n$ entsprechenden Lösungen von 1) mit $\xi^1 \xi^2 \ldots \xi^s \ldots \xi^n$ bezeichnet, so ist:

$$\varrho^s \xi_i^s = \sum_k c_{ik} \xi_k^s$$

für $s = 1, 2 \ldots n$.

Es besteht nun folgender Satz:

Die Polarform von $f(x)$

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i' f_i(x),$$

in welcher

$$f_i(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ist, wird, wenn man die x_i' und x_i cogredienten Transformationen unterwirft, die $f(x)$ in sich selbst überführen, in $\sum_i \xi_i' f_i(\xi)$ transformirt.[1])

Es sei $x_i' = x_i^s$, so ist die entsprechende Transformation nach 1): $\varrho^s \xi_i^s$, setzt man dies in:

$$\sum_i x_i' f_i(x) = \sum_i \xi_i' f_i(\xi),$$

so folgt:

$$\sum_i x_i^s f_i(x) = \sum_i \xi_i^s f_i(\xi)$$

und daher:

$$\sum_i \xi_i^s f_i(x) = \frac{1}{\varrho^s} \sum_i \xi_i^s f_i(\xi).$$

$\frac{1}{\varrho^s}$ ist nach dem Satze von Frobenius auch stets eine Wurzel der charakteristischen Gleichung.

Die n linearen Formen $\sum_i \xi_i^s f_i(x)$ für $s = 1, 2 \ldots n$ gehen in sich über, der beim Uebergange auftretende Factor rechter Hand ist eine Wurzel der charakteristischen Gleichung, und zwar die reciproke, welche zu dem Werthsystem ξ^s gehört.

Aus

$$\sum_i \xi_i^s f_i(x) = \frac{1}{\varrho^s} \sum_i \xi_i^s f_i(\xi)$$

folgt:

$$1) \quad \sum_i \xi_i^s f_i(\xi^s) = \frac{1}{(\varrho^s)^2} \sum_i \xi_i^s f_i(\xi^s)$$

für $s = 1, 2 \ldots n$.

---

[1]) Vergl. z. B. Rosanes: Crelle 80, p. 68 ff.

Seien ξ^r und ξ^s zwei Lösungssysteme, die zu den zwei Wurzeln ϱ^r und ϱ^s gehören, so ist:

$$2)\quad \sum_i \xi_i^s f_i(\xi^r) = \frac{1}{\varrho^s \varrho^r} \sum_i \xi_i^s f_i(\xi^r).$$

Daraus folgt[1]):

Sobald ϱ^s nicht einen der ausgezeichneten Werthe ± 1 hat, ist:

$$\sum \xi_i^s f_i(\xi^s) = 0,$$

d. h. ξ^s erfüllt die Bedingung $f(x) = 0$ und die in sich transformirte Form:

$$\sum_i \xi_i^s f_i(x) = 0$$

ist die Tangentialmannigfaltigkeit an $f(x) = 0$ im Punkte ξ^s. Ferner besteht nach 2) zwischen je zwei Lösungssystemen, die zu nicht reciproken Wurzeln gehören, die harmonische Beziehung:

$$\sum_i \xi_i^s f_i(\xi^r) = 0.$$

Wir hatten im vorigen Paragraphen die folgenden n linearen Formen gefunden, welche bei den Transformationen des § 2 in sich übergehen:

1) m Formen v:

$$\sum_i v_i^{(j)} x_i = -\sum_i v_i^{(j)} \xi_i,\ j = 1, 2 \ldots m,$$

2) eine Form w:

$$\sum_i w_i x_i = \sum_i w_i \xi_i,$$

3) $n-m-1$ Formen ω:

$$\sum_i \omega_i^{(p)} x_i = \frac{k+\gamma_p}{k-\gamma_p} \sum_i \omega_i^{(p)} \xi_i$$

für $p = 1, 2 \ldots n-m-1$.

Die m Ebenen $v^{(j)}$ sind für die Transformation willkürlich zu wählen; ebenso ist die w Ebene willkürlich; nur muss sie den m Bedingungen: $\sum A_{ik} v_i^{(j)} w_k = 0$ für $j = 1, 2 \ldots m$ genügen. Die $n-m-1$ ω Ebenen sind sämmtlich durch den Charakter der Transformation eindeutig bestimmte Tangentialebenen, die zu den $v^{(j)}$ und w conjugirt sind.

[1]) Voss: Annalen XIII, p. 323, hat diese Sätze für orthogonale Substitutionen aufgestellt.

Diese n Formen sind, wenn alle ϱ^s verschieden sind, mit den n Formen $\sum_i \xi_i^s f_i(x)$ identisch, da bei einer Hermite'schen Transformation nur n unabhängige Formen in sich transformirt werden; sind nicht alle ϱ^s verschieden, so sind jene Formen wenigstens aus diesen linear componirbar. Für jede in sich transformirte lineare Form b galt:

$$\sum_i b_i x_i = \varrho^s \sum_l b_i \xi_i,$$

wo ϱ^s eine Wurzel der charakteristischen Gleichung ist. Daher ergiebt sich aus den bei unseren n Formen auftretenden Factoren des Ueberganges, dass die charakteristische Gleichung die m fache Wurzel -1, die einfache $+1$ und $n-m-1$ Wurzeln $\frac{k+\gamma_p}{k-\gamma_p}$ $(p = 1, 2 \ldots n-m-1)$ besitzt.

Hiermit ist auch der p. 22 ohne Beweis aufgestellte Satz erhärtet. Nach dem Satze von Frobenius (p. 12) muss, wenn $n-m-1$ ungerade ist, d. h. n und m gleichzeitig gerade oder ungerade, eine der $n-m-1$ Grössen γ_p Null sein; die übrigen Factoren des Ueberganges sind reciprok. Wenn $n-m-1$ gerade ist, zerfallen die γ_p in zwei Systeme von $\frac{n-m-1}{2}$ Grössen mit entgegengesetzten Vorzeichen; wenn $n-m-1$ ungerade ist, ist eine der Grössen γ_p Null und die übrigen $n-m-2$ zerfallen in zwei Systeme von je $\frac{n-m-2}{2}$ Grössen mit entgegengesetzten Vorzeichen. Hieraus ergeben sich die Relationen, welche wir p. 22 für die γ aufstellten; aber auch umgekehrt könnte man aus den dort aufgestellten Relationen unsere jetzigen Resultate herleiten.

Wenn $n-m-1$ ungerade ist, so geht eine ω Form, da ein γ Null ist, in sich ohne constanten Factor über; dieses ω sei mit A bezeichnet, dann geht das Büschel $w+\lambda A = 0$ und jeder Repräsentant desselben in sich über. In diesem Büschel ist ausser w noch eine allgemeine Mannigfaltigkeit enthalten; es bleiben also $m+2$ allgemeine Mannigfaltigkeiten fest. Es entsteht daher die Frage, ob man nicht bei ungeradem $n-m-1$ veranlassen kann, dass ebenso wie bei geradem $n-m-1$ kein Büschel $w+\lambda A = 0$ in sich übergeführt wird; diese Frage ist natürlich zu bejahen. Man braucht nur zur w Ebene eine Ebene mit variablen Coefficienten u zu wählen; man kann unsere obigen Schlüsse auch noch anwenden, es bleiben dann aber die Ebenen $v^{(j)}$ und $n-m$ Tangentialebenen ω fest. Da die ν und ζ selbst, wenn man die w Ebene fest wählt, von u abhängen, so hat diese Wahl der w Ebene

keinen wesentlichen Einfluss auf die τ. Für gerades $n-m-1$ würde man auf diese Art keine Verallgemeinerung finden; man hätte nur den Fall, wo $v^{(j)}$ und eine conjugirte specielle Mannigfaltigkeit festbleiben, was auch zu erreichen ist, wenn man w als Tangentialmannigfaltigkeit wählt.[1])

Unabhängig vom Charakter der Zahl m gelten folgende Resultate:

Das Büschel $\sum_{j=1}^{j=m} \mu_j v^{(j)}$ wird in sich transformirt; ferner besitzt die Schaar linearer Formen: $\sum_{j-1}^{j=m} \mu_j v^{(j)} + \lambda w$ die Eigenschaft, dass je zwei Formen, die entgegengesetzten Zeichen der $\mu^{(j)}$ entsprechen, gegenseitig in sich übergehen.[2])

Bei einer Hermite'schen Substitution bleiben, wie wir sahen, im Allgemeinen n Punkte fest; wir haben dieselben schon p. 23 betrachtet. Zu den festbleibenden Punkten gehören stets die Berührpunkte der ω Ebenen mit dem quadratischen Gebilde.

Für $m = 1$ ergeben sich folgende Resultate: Es bleiben die $n-2$ Berührpunkte der ω Ebenen mit der Fläche fest; ferner der Pol der v Ebene als Schnitt von $n-1$ in sich übergehenden Ebenen, sowie der Schnittpunkt der $n-2$ Ebenen $\omega^{(p)}$ und w. Diese Auseinandersetzung gilt nur für gerades n.

Bei geradem n und uneigentlicher Substitution mit der einfachen Wurzel -1 bleiben $n-2$ Punkte auf der Fläche und

---

[1]) Beschränkt man z. B. den Punkt t im R_3 auf eine Gerade, so kann man den Punkt τ in einer Ebene w wählen, welche durch die conjugirte Gerade hindurchgeht und variable Coefficienten u besitzt. Ist $f = 2x_1x_4 + 2x_2x_3$, $v^1 = x_2$, $v^2 = x_3$, $w = u_1x_1 + u_4x_4$, so findet man:

$$\begin{array}{l|l} x_1 = ku_4 + \lambda u_4 & \xi_1 = ku_4 - \lambda u_4 \\ x_2 = v^2 & \xi_2 = -v^2 \\ x_3 = v^1 & \xi_3 = -v^1 \\ x_4 = ku_1 - \lambda u_1 & \xi_4 = ku_1 + \lambda u_1 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{k+\lambda}{k-\lambda}\xi_1,\ x_2 = -\xi_2,\ x_3 = -\xi_3,\ x_4 = \frac{k-\lambda}{k+\lambda}\xi_4,$$

dieser Fall fehlt bei den Betrachtungen des Herrn Lindemann über die eigentlichen Transformationen einer Fläche zweiten Grades in sich; für $k = 0$ erhält man den von Herrn Lindemann angegebenen Fall (a. a. O. p. 370).

[2]) Voss: Annalen XIII, p. 336 und 371. Die dort aufgestellten Sätze gelten nur für $m = 1$ und sind nur für orthogonale Substitutionen bewiesen.

2 conjugirte fest, die mit den $n-2$ verbunden, Tangenten der Fläche liefern.[1])

Ist n ungerade, so enthält das Büschel $w+\lambda\mathcal{A}=0$ ausser $\mathcal{A}$ noch eine Tangentialebene, deren Berührungspunkt auch fest bleibt. Dieser Punkt liegt auf w und tritt an Stelle des oben bestimmten festbleibenden Punktes auf w. Bei ungeradem n und $m=1$ bleibt also nur ein ausserhalb der Fläche gelegener Punkt fest.

Wir geben noch Einiges über quadratische Formen, welche durch die Hermite'sche Transformation:

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik}\xi_k$$

für $i=1,2\ldots n$ gleichzeitig mit der Grundform $f(x)$ in sich übergehen.

Wegen des Verhaltens der $v^j(x)$ und w ist klar, dass:

$$\sum_{j=1}^{j=m} k_j (v^j)^2 + \lambda w = 0,$$

wo λ und die m Grössen k_j willkürliche Constanten sind, in sich übergeht.

Sei $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i(x)$ bezeichnet, so führt unsere Hermite'sche Transformation:

$$f_1(x)\sum_{k=1}^{k=n} c_{1k}x_k + f_2(x)\sum_{k=1}^{k=n} c_{2k}x_k + \ldots f_n(x)\sum_{k=1}^{k=n} c_{nk}x_k$$

in

$$f_1(\xi)\sum_{k=1}^{k=n} c_{1k}\xi_k + f_2(\xi)\sum_{k=1}^{k=n} c_{2k}\xi_k + \ldots f_n(\xi)\sum_{k=1}^{k=n} c_{nk}\xi_k$$

über.

Sei die Form, die man durch diese Bildung aus $f(x)$ erhält, mit $f^1(x)$ bezeichnet, so kann man aus $f^1(x)$ sich in analoger Weise $f^2(x)$ bilden und diesen Process fortsetzen. Diese Formengruppe, deren Construction Herr Rosanes[2]) angegeben hat, brauchen wir für unsere späteren geometrischen Betrachtungen.

Zur Herleitung unserer Transformationsformeln bedienten wir uns der Geometrie des R_{n-1}. Man kann diesem für $n>4$ scheinbar abstracten Begriffe im Falle $n=5$ und $n=6$ auch eine geometrische Deutung in unserem

---

[1]) Voss: Annalen XIII, p. 324, beweist diesen Satz für orthogonale Substitutionen. Er citirt irrthümlich: Frahm Inauguraldissertation statt Habilitationsschrift § 15. Die dort erhaltenen Resultate sind durch Druckfehler entstellt und auch unvollständig.

[2]) Crelle's Journal Bd. 80, p. 66—72.

R_3 geben. Dem Falle $n = 5$ entspricht die Darboux'sche Kugelgeometrie und in der Plücker'schen Liniengeometrie die Transformation eines festen linearen Complexes in sich; dem Fall $n = 6$ entsprechen die Berührungstransformationen der Lie'schen Kugelgeometrie und die Collineationen und Correlationen der Plücker'schen Liniengeometrie.

§ 5.

Die Plücker'sche Liniengeometrie und die Correlationen.

In der Plücker'schen Liniengeometrie betrachtet man die Gerade als durch sechs homogene Coordinaten $p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ p_6$, zwischen denen eine quadratische Relation:

$$P = p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$$

besteht, die aber sonst beliebig variabel sind, gegeben. Wir können uns die sechs Grössen $p_k (k = 1, 2 .. 6)$ als sechs homogene Coordinaten eines Punktes im R_5 denken; dann wird die Gesammtheit aller Geraden des R_3, die eine vierfache Mannigfaltigkeit konstituiren, aus dem R_5 durch die quadratische Gleichung $P = 0$ ausgeschieden. Die Liniengeometrie ist daher eine Geometrie, die sich auf sechs homogenen Coordinaten, zwischen denen eine quadratische Gleichung besteht, aufbaut; sie ist daher ähnlich analytisch zu behandeln wie die Geometrie einer Fläche zweiten Grades im R_3; sie ist Geometrie einer $M_4^{(2)}$ im R_5.[1])

Da die Bedingung des Schneidens von zwei Geraden mit den Coordinaten p und p':

$$\Sigma \frac{\partial P}{\partial p_k} p'_k = 0$$

eine Polarenrelation ist, so ergiebt sich folgender Satz:

Setzt man statt der Liniencoordinaten p beliebige lineare Functionen derselben, die nur der einen Bedingung genügen sollen, die

$$M_4^{(2)} : P = 0$$

in sich zu transformiren, so hat man eine collineare oder reciproke

[1]) F. Klein: Liniengeometrie und metrische Geometrie: Annalen V, p. 258 und 259, p. 262 und 263.

Umformung des Linienraumes; auf diese Weise erhält man alle collinearen oder reciproken Umformungen; bei den ersteren ist die Substitutionsdeterminante $+1$; bei den letzteren -1.

Dieser Satz ist zum ersten Male von Herrn F. Klein[1]) ausgesprochen worden.

Wir werden nur die Correlationen besprechen, und zwar indem wir die im R_5 gelegene $M_4^{(2)}$ $P = 0$ im projectivischen Sinne untersuchen und die Resultate in die Sprache der Liniengeometrie übersetzen.[2])

Will man $P = p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$ durch uneigentliche Transformationen in sich selbst transformiren, so hat die charakteristische Function sechs Wurzeln, von denen eine stets $+1$, eine stets -1 ist. In Bezug auf die Classification der uneigentlichen Substitutionen nach den Elementartheilern der charakteristischen Function verweise ich auf die Arbeit von Voss in den Math. Annalen Bd. XIII, p. 357. Die dort unterschiedenen elf Fälle ergeben sich nach unserer Methode in folgender Weise:

Nr. 1. Die Hilfspunkte t liegen auf einer Ebene v. Als v Ebene sei der Complex $p_1 + p_4 = 0$, als conjugirte w Ebene $p_1 - p_4 = 0$ gewählt; dann sind die ζ Lösungen von:

$$p_1 + p_4 = 0,$$
$$p_1 - p_4 = 0,$$
$$u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 + u_4 p_4 + u_5 p_5 + u_6 p_6 = 0.$$

$$\begin{array}{lcccccc} \zeta^1: & 0, & -u_5, & 0, & 0, & u_2, & 0, \\ \zeta^2: & 0, & 0, & -u_6, & 0, & 0, & u_3, \\ \zeta^3: & 0, & 0, & -u_5, & 0, & u_3, & 0, \end{array}$$

[1]) F. Klein: Annalen IV, p. 356 in „Geometrisches über Resolventen". Vergl. F. Klein: Annalen V, p. 262. Voss: Annalen XIII, p. 354.

[2]) Die Correlationen sind in Clebsch-Lindemann II, p. 401—414, ausgehend von der reciproken Verwandtschaft betrachtet und die einzelnen Fälle discutirt worden. In ähnlicher Weise von Corrado Segre: Ricerche sulle omografie e sulle correlazione in generale e particolarmente su quelle dello spacio ordinario considerate nella geometria della retta. Voss: Annalen XIII, erwähnt in der Arbeit über orthogonale Substitutionen Resultate über Correlationen (p. 354 ff.), ohne jedoch Transformationsformeln aufzustellen. Synthetisch hat Sturm in den Math. Annalen Bd. 26 die Correlationen untersucht.

$$\begin{aligned}
p_1 &= k(u_1 - u_4) + v, & p'_1 &= k(u_1 - u_4) - v,\\
p_2 &= -2k u_5 - \sigma_1 u_5, & p'_2 &= -2k u_5 + \sigma_1 u_5,\\
p_3 &= -2k u_6 - \sigma_2 u_6 - \sigma_3 u_5, & p'_3 &= -2k u_6 + \sigma_2 u_6 + \sigma_3 u_5,\\
p_4 &= k(u_4 - u_1) + v, & p'_4 &= k(u_4 - u_1) - v,\\
p_5 &= -2k u_2 + \sigma_1 u_2 + \sigma_3 u_3, & p'_5 &= -2k u_2 - \sigma_1 u_2 - \sigma_3 u_3,\\
p_6 &= -2k u_3 + \sigma_2 u_3. & p'_6 &= -2k u_3 - \sigma_2 u_3.
\end{aligned}$$

Durch Elimination der u und v ergeben sich die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}
p_1 &= -p'_4,\\
p_2 &= \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1} p'_2,\\
p_3 &= \frac{4k\sigma_3}{(2k-\sigma_1)(2k-\sigma_2)} p'_2 + \frac{2k+\sigma_2}{2k-\sigma_2} p'_3,\\
p_4 &= -p'_1,\\
p_5 &= \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1} p'_5 - \frac{4k\sigma_3}{(2k+\sigma_1)(2k+\sigma_2)} p'_6,\\
p_6 &= \frac{2k-\sigma_2}{2k+\sigma_2} p'_6.
\end{aligned}$$

Die charakteristische Function der Transformation ist:

$$\begin{vmatrix}
\varrho & 0 & 0 & c_{14} & 0 & 0\\
0 & \varrho - c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & c_{32} & \varrho - c_{33} & 0 & 0 & 0\\
c_{41} & 0 & 0 & \varrho & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \varrho - c_{55} & c_{56}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho - c_{66}
\end{vmatrix}$$

$$c_{14} = 1, \quad c_{22} = \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1}, \quad c_{32} = \frac{-4k\sigma_3}{(2k-\sigma_1)(2k-\sigma_2)},$$

$$c_{33} = \frac{2k+\sigma_2}{2k-\sigma_2}, \quad c_{41} = 1, \quad c_{55} = \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1},$$

$$c_{56} = \frac{4k\sigma_3}{(2k+\sigma_1)(2k+\sigma_2)}, \quad c_{66} = \frac{2k-\sigma_2}{2k+\sigma_2}.$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$\left(\varrho^2 - 1\right)\left(\varrho - \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1}\right)\left(\varrho - \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1}\right) \cdot \left(\varrho - \frac{2k+\sigma_2}{2k-\sigma_2}\right)\left(\varrho - \frac{2k-\sigma_2}{2k+\sigma_2}\right).$$

Es ist dies der allgemeine Fall; er wird charakterisirt durch $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$[1]), die beiden ersten Elementartheiler beziehen sich auf die Wurzeln ± 1, die anderen auf die zwei Paare reciproker Wurzeln.

---

[1]) Vgl. Weiler: Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades. Math. Annalen Bd. VII, p. 149.

Nr. 2. Man setze in Nr. 1: $\sigma_1 = \sigma_2$.

$$p_1 = -p_4', \; p_2 = \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1} p_2', \qquad p_3 = \frac{4k\sigma_3}{(2k-\sigma_1)^2} p_2' + \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1} p_3',$$

$$p_4 = -p_1', \; p_5 = \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1} p_5' - \frac{4k\sigma_3}{(2k+\sigma_1)^2} p_6', \; p_6 = \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1} p_6'.$$

Die charakteristische Function der Transformation ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho - \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4k\sigma_3}{(2k-\sigma_1)^2} & \varrho - \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho - \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1} & \frac{4k\sigma_3}{(2k+\sigma_1)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho - \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1} \end{vmatrix}.$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$\left(\varrho^2 - 1\right)\left(\varrho - \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1}\right)^2 \cdot \left(\varrho - \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1}\right)^2.$$

Dieser Fall wird charakterisirt durch: $[1, 1, 2, 2]$; es sind zwei zu einander reciproke Wurzeln vorhanden.

Nr. 3. Man setze in Nr. 1: $\sigma_2 = -\sigma_1$.

$$p_1 = -p_4', \; p_2 = \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1} p_2', \qquad p_3 = \frac{4k\sigma_3}{4k^2-\sigma_1^2} p_2' + \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1} p_3',$$

$$p_4 = -p_1', \; p_5 = \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1} p_5' - \frac{4k\sigma_3}{4k^2-\sigma_1^2} p_6', \; p_6 = \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1} p_6'.$$

Die charakteristische Function der Transformation ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho - \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4k\sigma_3}{4k^2-\sigma_1^2} & \varrho - \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho - \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1} & \frac{4k\sigma_3}{4k^2-\sigma_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho - \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1} \end{vmatrix}.$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$\left(\varrho^2 - 1\right) \cdot \left(\varrho - \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1}\right)^2 \cdot \left(\varrho - \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1}\right)^2.$$

Dieser Fall wird charakterisirt durch $[1, 1, (1, 1), (1, 1)]$. Für jede der reciproken Doppelwurzeln verschwinden alle ersten Unterdeterminanten.

Nr. 4. Man setze in Nr. 1: $\sigma_1 = 0$.

$$p_1 = -p'_4, \quad p_2 = p'_2, \qquad p_3 = \frac{2\sigma_3}{2k-\sigma_2} p'_2 + \frac{2k+\sigma_2}{2k-\sigma_3} p'_3,$$

$$p_4 = -p'_1, \quad p_5 = p'_5 - \frac{2\sigma_3}{2k+\sigma_2} p'_6, \quad p_6 = \frac{2k-\sigma_2}{2k+\sigma_2} p'_6.$$

Die charakteristische Function der Transformation ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\sigma_3}{2k-\sigma_2} & \varrho-\frac{2k+\sigma_2}{2k-\sigma_2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho-1 & \frac{2\sigma_3}{2k+\sigma_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho-\frac{2k-\sigma_2}{2k+\sigma_2} \end{vmatrix}.$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$\left(\varrho-1\right)^3 \cdot \left(\varrho+1\right) \cdot \left(\varrho-\frac{2k+\sigma_2}{2k-\sigma_2}\right)\left(\varrho-\frac{2k-\sigma_2}{2k+\sigma_2}\right).$$

Dieser Fall wird charakterisirt durch $[(1, 1, 1), 1, 1, 1]$, für die dreifache Wurzel $+1$ verschwinden alle ersten und zweiten Unterdeterminanten.

Nr. 5. Man setze in Nr. 1: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

$$p_1 = -p'_4, \quad p_2 = p'_2, \qquad p_3 = \frac{\sigma_3}{k} p'_2 + p'_3,$$

$$p_4 = -p'_1, \quad p_5 = p'_5 - \frac{\sigma_3}{k} p'_6, \quad p_6 = p'_6.$$

Die charakteristische Function der Transformation ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_3}{k} & \varrho-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho-1 & \frac{\sigma_3}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho-1 \end{vmatrix}.$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$(\varrho-1)^5 \cdot (\varrho+1).$$

Dieser Fall wird charakterisirt durch $[(3, 1, 1), 1]$, für die fünffache Wurzel $+1$ verschwinden alle ersten und zweiten Unterdeterminanten.

Nr. 6. Man setze in Nr. 5: $\sigma_3 = 0$.

$$p_1 = -p'_4, \quad p_2 = p'_2, \quad p_3 = p'_3,$$

$$p_4 = -p'_1, \quad p_5 = p'_5, \quad p_6 = p'_6.$$

Die charakteristische Function der Transformation ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho-1 \end{vmatrix}.$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$(\varrho-1)^5 \cdot (\varrho+1).$$

Dieser Fall wird charakterisirt durch $[(1,1,1,1,1),1]$, für die fünffache Wurzel $+1$ verschwinden alle ersten, zweiten, dritten und vierten Unterdeterminanten.

Nr. 7. Man wähle zur w Ebene einen speciellen Complex, etwa $p_2 = 0$, dann ergiebt sich:

$$\begin{aligned} p_1 &= k(u_1-u_4)+\nu+\sigma_1 u_6, & p_1' &= k(u_1-u_4)-\nu-\sigma_1 u_6, \\ p_2 &= -2ku_5, & p_2' &= -2ku_5, \\ p_3 &= -2ku_6-\sigma_2 u_6-\sigma_3 u_5, & p_3' &= -2ku_6+\sigma_2 u_6+\sigma_3 u_5, \\ p_4 &= k(u_4-u_1)+\nu-\sigma_1 u_6, & p_4' &= +k(u_4-u_1)-\nu+\sigma_1 u_6, \\ p_5 &= -2ku_2+\sigma_3 u_3, & p_5' &= -2ku_2-\sigma_3 u_3, \\ p_6 &= -2ku_3+\sigma_2 u_3+\sigma_1(u_4-u_1). & p_6' &= -2ku_3-\sigma_2 u_3-\sigma_1(u_4-u_1). \end{aligned}$$

Durch Elimination der u und ν ergeben sich die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} p_1 &= -p_4' + \tfrac{\sigma_1\sigma_3}{k(\sigma_2-2k)}p_2' + \tfrac{2\sigma_1}{\sigma_2-2k}p_3', \\ p_2 &= p_2', \\ p_3 &= \tfrac{2k+\sigma_2}{2k-\sigma_2}p_3' + \tfrac{2\sigma_3}{2k-\sigma_2}p_2', \\ p_4 &= -p_1' + \tfrac{\sigma_1\sigma_3}{k(2k-\sigma_2)}p_2' + \tfrac{2\sigma_1}{2k-\sigma_2}p_3', \\ p_5 &= \tfrac{\sigma_1\sigma_3}{k(2k+\sigma_2)}(p_1'-p_4') - \tfrac{2\sigma_1^2\sigma_3}{k(4k^2-\sigma_2^2)}p_3' + p_5' - \tfrac{2\sigma_3}{2k+\sigma_2}p_6' - \tfrac{\sigma_1^2\sigma_3^2}{k^2(4k^2-\sigma_2^2)}p_2', \\ p_6 &= \tfrac{2k-\sigma_2}{2k+\sigma_2}p_6' - \tfrac{2\sigma_1}{2k+\sigma_2}(p_1'-p_4') + \tfrac{4\sigma_1^2}{4k^2-\sigma_2^2}p_3' + \tfrac{2\sigma_1^2\sigma_3}{k(4k^2-\sigma_2^2)}p_2'. \end{aligned}$$

Die charakteristische Function der Transformation ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho & \frac{\sigma_1\sigma_3}{k(2k-\sigma_2)} & \frac{2\sigma_1}{2k-\sigma_2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\sigma_3}{2k-\sigma_2} & \varrho-\frac{2k+\sigma_2}{2k-\sigma_2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{\sigma_1\sigma_3}{k(2k-\sigma_2)} & -\frac{2\sigma_1}{2k-\sigma_2} & \varrho & 0 & 0 \\ -\frac{\sigma_1\sigma_3}{k(2k+\sigma_2)} & \frac{\sigma_1^2\sigma_3^2}{k^2(4k^2-\sigma_2^2)} & \frac{2\sigma_1^2\sigma_3}{k(4k^2-\sigma_2^2)} & \frac{\sigma_1\sigma_3}{k(2k+\sigma_2)} & \varrho-1 & \frac{2\sigma_3}{2k+\sigma_2} \\ \frac{2\sigma_1}{2k+\sigma_2} & -\frac{2\sigma_1^2\sigma_3}{k(4k^2-\sigma_2^2)} & -\frac{4\sigma_1^2}{4k^2-\sigma_2^2} & -\frac{2\sigma_1}{2k+\sigma_2} & 0 & \varrho-\frac{2k-\sigma_2}{2k+\sigma_2} \end{vmatrix}$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$(\varrho-1)^3\cdot(\varrho+1)\cdot\left(\varrho-\frac{2k-\sigma_2}{2k+\sigma_2}\right)\cdot\left(\varrho-\frac{2k+\sigma_2}{2k-\sigma_2}\right).$$

Dieser Fall wird charakterisirt durch: [3, 1, 1, 1]; für die dreifache Wurzel $+1$ verschwinden nicht alle ersten Unterdeterminanten.

Nr. 8. Man setze in Nr. 7: $\sigma_2 = 0$.

$$p_1 = -p'_4 - \frac{\sigma_1\sigma_3}{2k^2}p'_2 - \frac{\sigma_1}{k}p'_3$$

$$p_2 = p'_2, \quad p_3 = p'_3 + \frac{\sigma_3}{k}p'_2$$

$$p_4 = -p'_1 + \frac{\sigma_1\sigma_3}{2k^2}p'_2 + \frac{\sigma_1}{k}p'_3$$

$$p_5 = \frac{\sigma_1\sigma_3}{2k^2}(p'_1 - p'_4) - \frac{\sigma_1^2\sigma_3^2}{4k^4}p'_2 - \frac{\sigma_1^2\sigma_3}{2k^3}p'_3 + p'_5 - \frac{\sigma_3}{k}p'_6$$

$$p_6 = p'_6 - \frac{\sigma_1}{k}(p'_1 - p'_4) + \frac{\sigma_1^2}{k^2}p'_3 + \frac{\sigma_1^2\sigma_3}{2k^3}p'_2.$$

Die charakteristische Function der Transformation ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho & \frac{\sigma_1\sigma_3}{2k^2} & \frac{\sigma_1}{k} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_3}{k} & \varrho-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{\sigma_1\sigma_3}{2k^2} & -\frac{\sigma_1}{k} & \varrho & 0 & 0 \\ -\frac{\sigma_1\sigma_3}{2k^2} & \frac{\sigma_1^2\sigma_3^2}{4k^4} & \frac{\sigma_1^2\sigma_3}{2k^3} & \frac{\sigma_1\sigma_3}{2k^2} & \varrho-1 & \frac{\sigma_3}{k} \\ \frac{\sigma_1}{k} & -\frac{\sigma_1^2\sigma_3}{2k^3} & -\frac{\sigma_1^2}{k^2} & -\frac{\sigma_1}{k} & 0 & \varrho-1 \end{vmatrix}$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$(\varrho-1)^5\cdot(\varrho+1) = 0.$$

Dieser Fall wird charakterisirt durch: [5, 1]; für die fünffache Wurzel $+1$ verschwinden nicht alle ersten Unterdeterminanten.

Nr. 9. Als v Ebene sei der Complex $p_1+\sigma p_4=0$, als w Ebene der specielle Complex $p_2=0$ gewählt, dann ergiebt sich:

$$\begin{array}{l|l}
p_1 = k\sigma(u_4-\sigma u_1)+\nu\sigma-\sigma\sigma_1(u_6+u_3) & p'_1 = k\sigma(u_4-\sigma u_1)-\nu\sigma+\sigma\sigma_1(u_3+u_6)\\
p_2 = 2k\sigma u_5 & p'_2 = 2k\sigma u_5\\
p_3 = 2k\sigma u_6-\sigma_1(u_4-\sigma u_1)+\sigma_2 u_5 & p'_3 = 2k\sigma u_6+\sigma_1(u_4-\sigma u_1)-\sigma_2 u_5\\
p_4 = k(u_1\sigma-u_4)+\nu+\sigma_1(u_6+u_3) & p'_4 = k(u_1\sigma-u_4)-\nu-\sigma_1(u_6+u_3)\\
p_5 = 2k\sigma u_2+\sigma_2(-u_3+u_6) & p'_5 = 2k\sigma u_2-\sigma_2(u_6-u_3)\\
p_6 = 2k\sigma u_3-\sigma_1(u_4-\sigma u_1)-\sigma_2 u_5 & p'_6 = 2k\sigma u_3+\sigma_1(u_4-u_1\sigma)+\sigma_2 u_5\,.
\end{array}$$

Setzt man, nachdem man die u und ν eliminirt hat, $\sigma_2=\sigma$ und dann $\sigma=0$, so ergeben sich die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}
p_1 &= -p'_1,\ p_2 = p'_2,\ p_3 = \frac{k}{\sigma_1}p'_1+\frac{1}{k}p'_2-p'_6\\
p_4 &= \frac{k^2}{\sigma_1^2}p'_1-\frac{k}{\sigma_1}(p'_3+p'_6)-p'_4\\
p_5 &= p'_5-\frac{1}{k}p'_6+\frac{1}{k}p'_3+\frac{1}{k^2}p'_2\\
p_6 &= \frac{k}{\sigma_1}p'_1-\frac{1}{k}p'_2-p'_3\,.
\end{aligned}$$

Die charakteristische Function der Transformation ist:

$$\begin{vmatrix}
\varrho+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \varrho-1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\frac{k}{\sigma_1} & -\frac{1}{k} & \varrho & 0 & 0 & 1\\
-\frac{k^2}{\sigma_1^2} & 0 & \frac{k}{\sigma_1} & \varrho+1 & 0 & \frac{k}{\sigma_1}\\
0 & -\frac{1}{k^2} & -\frac{1}{k} & 0 & \varrho-1 & \frac{1}{k}\\
-\frac{k}{\sigma_1} & \frac{1}{k} & 1 & 0 & 0 & \varrho
\end{vmatrix}$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$(\varrho+1)^3\,.\,(\varrho-1)^3\,.$$

Dieser Fall wird charakterisirt durch [3, 3]; sowohl für die dreifache Wurzel $+1$ als auch für die dreifache Wurzel -1 verschwinden nicht alle ersten Unterdeterminanten.

Nr. 10. Die Hilfspunkte t liegen auf drei Ebenen $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$, wir wählen zu diesen: $p_1+p_4=0$; $p_2+p_5=0$; $p_3+p_6=0$; die conjugirte w Ebene sei $p_2-p_5=0$. Es ergiebt sich dann:

$$\begin{array}{l|l}
p_1 = 4k(u_1-u_4)+v+\sigma_1(u_6-u_3) & p'_1 = 4k(u_1-u_4)-v-\sigma_1(u_6-u_3)\\
p_2 = 4k(u_2-u_5)+v' & p'_2 = 4k(u_2-u_5)-v'\\
p_3 = 4k(u_3-u_6)+v''+\sigma_1(u_1-u_4) & p'_3 = 4k(u_3-u_6)-v''-\sigma_1(u_1-u_4)\\
p_4 = 4k(u_4-u_1)+v+\sigma_1(u_3-u_6) & p'_4 = 4k(u_4-u_1)-v-\sigma_1(u_3-u_6)\\
p_5 = 4k(u_5-u_2)+v' & p'_5 = 4k(u_5-u_2)-v'\\
p_6 = 4k(u_6-u_3)+v''+\sigma_1(u_4-u_1) & p'_6 = 4k(u_6-u_3)-v''-\sigma_1(u_4-u_1).
\end{array}$$

Durch Elimination der u und v ergeben sich die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}
p_1 &= -\frac{\sigma_1^2}{16k^2+\sigma_1^2}p'_1-\frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2}p'_3-\frac{16k^2}{16k^2+\sigma_1^2}p'_4+\frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2}p'_6\\
p_2 &= -p''_5\\
p_3 &= +\frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2}p'_1-\frac{\sigma_1^2}{16k^2+\sigma_1^2}p'_3-\frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2}p'_4-\frac{16k^2}{16k^2+\sigma_1^2}p'_6\\
p_4 &= -\frac{16k^2}{16k^2+\sigma_1^2}p'_1+\frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma^2}p'_3-\frac{\sigma_1^2}{16k^2+\sigma_1^2}p'_4-\frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2}p'_6\\
p_5 &= -p'_2\\
p_6 &= -\frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2}p'_1-\frac{16k^2}{16k^2+\sigma_1^2}p'_3+\frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2}p'_4-\frac{\sigma_1^2}{16k^2+\sigma_1^2}p'_6.
\end{aligned}$$

Die charakteristische Function der Transformation ist:

$$\begin{vmatrix}
\varrho+\frac{\sigma_1^2}{16k^2+\sigma_1^2} & 0 & \frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2} & \frac{16k^2}{16k^2+\sigma_1^2} & 0 & -\frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2}\\
0 & \varrho & 0 & 0 & 1 & 0\\
-\frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2} & 0 & \varrho+\frac{\sigma_1^2}{16k^2+\sigma_1^2} & \frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2} & 0 & \frac{16k^2}{16k^2+\sigma_1^2}\\
\frac{16k^2}{16k^2+\sigma_1^2} & 0 & -\frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2} & \varrho+\frac{\sigma_1^2}{16k^2+\sigma_1^2} & 0 & \frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2}\\
0 & 1 & 0 & 0 & \varrho & 0\\
\frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2} & 0 & \frac{16k^2}{16k^2+\sigma_1^2} & -\frac{4k\sigma_1}{16k^2+\sigma_1^2} & 0 & \varrho+\frac{\sigma_1^2}{16k^2+\sigma_1^2}
\end{vmatrix}$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$(\varrho+1)^3\cdot(\varrho-1)\cdot\left(\varrho^2+2\varrho\frac{\sigma_1^2-16k^2}{\sigma_1^2+16k^2}+1\right).$$

Dieser Fall wird charakterisirt durch: [1, (1, 1, 1), 1, 1], für die dreifache Wurzel -1 verschwinden alle ersten und zweiten Unterdeterminanten; dieser Fall ist Nr. 4 analog, nur spielt hier -1 die Rolle, welche dort $+1$ inne hat. Setzt man $\sigma_1 = 0$, so erhält man:

$$\begin{gathered}
p_1 = -p'_4,\ p_2 = -p'_5,\ p_3 = -p'_6,\\
p_4 = -p'_1,\ p_5 = -p'_2,\ p_6 = -p'_3.
\end{gathered}$$

Die charakteristische Function der Transformation ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \varrho \end{vmatrix}$$

Die Ausrechnung ergiebt: $(\varrho+1)^3.(\varrho-1)^3$.

Dieser Fall wird charakterisirt durch: $[(1,1,1);\ (1,1,1)]$; sowohl für die dreifache Wurzel $+1$, als auch für die dreifache Wurzel -1 verschwinden alle ersten und zweiten Unterdeterminanten.

Nr. 11. Die Hilfspunkte t liegen auf den drei Complexen: $p_1+p_4=0$, $p_2=0$, $\lambda p_1+p_6=0$, die conjugirte w Ebene sei der specielle Complex $p_2=0$. Es ergiebt sich dann:

$$\begin{aligned} p_1 &= k(u_1-u_4-\lambda u_6)+\nu-\sigma_1 u_5 \\ p_2 &= -2ku_5 \\ p_3 &= \nu'' \\ p_4 &= k(u_4+\lambda u_6-u_1)+\nu+\lambda\nu''+\sigma_1 u_5 \\ p_5 &= -2ku_2+\sigma_1(u_1-u_4-\lambda u_6) \\ p_6 &= k\lambda(u_4+\lambda u_6-u_1)+\nu'+\sigma_1\lambda u_5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p'_1 &= k(u_1-u_4-\lambda u_6)-\nu+\sigma_1 u_5 \\ p'_2 &= -2ku_5 \\ p'_3 &= -\nu'' \\ p'_4 &= k(u_4+\lambda u_6-u_1)-\nu-\lambda\nu''-\sigma_1 u_6 \\ p'_5 &= -2ku_2-\sigma_1(u_1-u_4-\lambda u_6) \\ p'_6 &= k\lambda(u_4+\lambda u_6-u_1)-\nu'-\sigma_1\lambda u_5 . \end{aligned}$$

Durch Elimination der u und ν ergeben sich die Transformationsformeln:

$$p_1 = -p'_4+\frac{\sigma_1}{k}p'_2+\lambda p'_3,\ p_2=p'_2,\ p_3=-p'_3,$$

$$p_4 = -p'_1-\frac{\sigma_1}{k}p'_2-\lambda p'_3,$$

$$p_5 = +p'_5+\frac{\sigma_1}{k}(p'_1-p'_4)+\lambda\frac{\sigma_1}{k}p'_3+\frac{\sigma_1^2}{k^2}p'_2$$

$$p_6 = -p'_6-\lambda(p'_1-p'_4)-\lambda^2 p'_3-\lambda\frac{\sigma_1}{k}p'_2 .$$

Die charakteristische Function der Transformation ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho & -\frac{\sigma_1}{k} & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\sigma_1}{k} & \lambda & \varrho & 0 & 0 \\ -\frac{\sigma_1}{k} & -\frac{\sigma_1^2}{k^2} & -\lambda\frac{\sigma_1}{k} & \frac{\sigma_1}{k} & \varrho-1 & 0 \\ \lambda & \lambda\frac{\sigma_1}{k} & \lambda^2 & -\lambda & 0 & \varrho+1 \end{vmatrix}$$

Die Ausrechnung ergiebt: $(\varrho-1)^3.(\varrho+1)^3$.

Dieser Fall wird charakterisirt durch: $[3,(1,1,1)]$; für die dreifache Wurzel $+1$ verschwinden nicht alle ersten Unterdeterminanten, für die dreifache Wurzel -1 verschwinden alle ersten und zweiten Unterdeterminanten.

§ 6.

Die zu den aufgestellten Correlationen gehörigen in sich übergehenden Complexe.

In der allgemeinen Theorie sahen wir, dass m allgemeine lineare Mannigfaltigkeiten $v^{(j)}$, eine zu diesen conjugirte w, sowie $n-m-1$ Tangentialmannigfaltigkeiten ω durch unsere Transformationen in sich übergehen. Diese letzteren Mannigfaltigkeiten sind zu den $m+1$ Ebenen $v^{(j)}$ und w conjugirt. Für die Liniengeometrie sind diese Mannigfaltigkeiten lineare Complexe, die Tangentialmannigfaltigkeiten sind specielle lineare Complexe. Die Bedingung des Conjugirtseins von zwei Mannigfaltigkeiten bedeutet das Verschwinden der simultanen Invariante der zwei linearen Complexe und hiermit ihre involutorische Lage.[1]) Wenn man dies auf die im § 5 gegebenen kanonischen Formen anwendet, erhält man folgende Resultate:

Nr. 1. Es werden transformirt:

1) $p_1-p_4=0$ in $p'_1-p'_4=0$.
2) $p_1+p_4=0$ „ $-(p'_1+p'_4)=0$.
3) $p_2=0$ „ $\frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1}p'_2=0$.
4) $p_5+\frac{\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_2}p_6=0$ „ $\frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1}(p'_5+\frac{\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_2}p'_6)=0$.
5) $p_6=0$ „ $\frac{2k-\sigma_2}{2k+\sigma_2}p'_6=0$.
6) $p_2+\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_3}p_3=0$ „ $\frac{2k+\sigma_2}{2k-\sigma_2}(p'_2+\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_3}p'_3)=0$.

Die zwei allgemeinen Complexe sind involutorisch; die vier speciellen Complexe liegen involutorisch zu ihnen., d. h. ihre Achsen sind Geraden der Congruenz: $p_1+p_4+\lambda(p_1-p_4)=0$. Die Achsen der vier speciellen Complexe gehen bei der Transformation in sich über, sie sind Kanten eines Tetraeders, dessen zwei fehlende Kanten von den Directrices der oben erwähnten Congruenz gebildet werden; diese zwei Kanten vertauschen sich gegenseitig.

---

[1]) F. Klein: Math. Annalen Bd. II, p. 201: Liniencomplexe ersten und zweiten Grades.

Nr. 2. Es werden transformirt:

$$\begin{aligned}
&1)\ p_1 - p_4 = 0 \text{ in } p'_1 - p'_4 = 0.\\
&2)\ p_1 + p_4 = 0 \text{ „ } -(p'_1 + p'_4) = 0.\\
&3)\ p_2 = 0 \text{ „ } \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1} p'_2 = 0.\\
&4)\ p_6 = 0 \text{ „ } \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1} p'_6 = 0.
\end{aligned}$$

Nr. 3. Entsteht aus Nr. 1, wenn man $\sigma_2 = -\sigma_1$ setzt; daher werden die zwei einfach unendlichen Complexschaaren:

$$p_2 + \tau_1 p_6 = 0 \text{ in } \frac{2k+\sigma_1}{2k-\sigma_1}(p'_2 + \tau_1 p'_6),$$

$$\left(p_2 - \frac{2\sigma_1}{\sigma_3} p_3\right) + \tau_1 \left(p_5 + \frac{\sigma_3}{2\sigma_1} p_6\right) = 0 \text{ in } \frac{2k-\sigma_1}{2k+\sigma_1}\left[\left(p'_2 - \frac{2\sigma_1}{\sigma_3} p'_3\right) + \tau_1 \left(p'_5 + \frac{\sigma_3}{2\sigma_1} p'_6\right)\right]$$

transformirt.

Die zwei Directrices jeder der zwei Complexschaaren schneiden sich; daher besteht jede der zwei einfach unendlichen Schaaren nur aus speciellen Complexen. Die Achsen jedes dieser speciellen Complexe werden in sich transformirt und gehören der Congruenz an, welche von $p_1 + p_4 = 0$ und $p_1 - p_4 = 0$ constituirt wird.

Nr. 4. Es werden transformirt:

$$\begin{aligned}
&1)\ p_1 - p_4 = 0 \text{ in } p'_1 - p'_4 = 0.\\
&2)\ p_1 + p_4 = 0 \text{ „ } -(p'_1 + p'_4) = 0.\\
&3)\ p_2 = 0 \text{ „ } p'_2 = 0.\\
&4)\ p_5 - \frac{\sigma_3}{\sigma_2} p_6 = 0 \text{ „ } p'_5 - \frac{\sigma_3}{\sigma_2} p'_6 = 0.\\
&5)\ p_6 = 0 \text{ „ } \frac{2k+\sigma_2}{2k-\sigma_2} p'_6 = 0.\\
&6)\ p_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} p_3 = 0 \text{ „ } \frac{2k-\sigma_2}{2k+\sigma_2}\left(p'_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} p'_3\right) = 0.
\end{aligned}$$

Daher geht die zweifach unendliche Schaar:

$$\tau_1 (p_1 - p_4) + \tau_2 p_2 + \tau_3 \left(p_5 - \frac{\sigma_3}{\sigma_2} p_6\right) = 0$$

in sich über. Die drei Complexe, welche durch die Gleichungen 2, 5, 6 angegeben werden, liegen zu jedem Complexe der Schaar involutorisch; ferner liegen $p_1 \pm p_4 = 0$ zu den vier speciellen Complexen wie zu jedem Complexe der Schaar:

$$\tau_2 p_2 + \tau_3 \left(p_5 - \frac{\sigma_3}{\sigma_2} p_6\right) = 0$$

involutorisch.

Nr. 5. In sich wird die Schaar:

$$\tau_1(p_1-p_4)+\tau_2 p_2+\tau_3 p_6=0$$

und der zu jedem Complex der Schaar involutorische Complex: $p_1+p_4=0$ transformirt.

Nr. 6. Diese Transformation ist geometrisch sehr interessant. Die Punkte τ fallen sämmtlich mit dem Pol η zusammen. Wir haben eine Centralprojection. Wendet man diese Transformation zweimal nach einander an, so erhält man die Identität. Alle Geraden des linearen Complexes $p_1+p_4=0$ gehen in sich über; zwei entsprechende Gerade sind reciproke Polaren in Bezug auf $p_1+p_4=0$. Das Entsprechen bei dieser Transformation ist involutorisch.[1]) In sich werden $p_1+p_4=0$ und die zu diesem Complex involutorisch gelegene Schaar:

$$\tau_1(p_1-p_4)+\tau_2 p_2+\tau_3 p_3+\tau_4 p_5+\tau_5 p_6=0$$

transformirt.

Nr. 7. Es werden transformirt:

1) $p_1+p_4=0$ in $-(p'_1+p'_4)=0$.

2) $p_2=0$ „ $p'_2=0$.

3) $\sigma_3 p_2+\sigma_2 p_3=0$ „ $\frac{2k+\sigma_2}{2k-\sigma_2}(\sigma_3 p'_2+\sigma_2 p'_3)=0$.

4) $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(p_1-p_4)+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}p_3-\frac{\sigma_1^2\sigma_3}{\sigma_2^3}p_2+p_6=0$ in $\frac{2k-\sigma_2}{2k+\sigma_2}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(p'_1-p'_4)+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}p'_3-\frac{\sigma_1^2\sigma_3}{\sigma_2^3}p'_2+p'_6\right)=0$.

In $p_2=0$ sind drei specielle Complexe zusammengefallen. Der allgemeine Complex $p_1+p_4=0$ und der specielle $p_2=0$ sind involutorisch; diese beiden Complexe liegen zu den zwei anderen in sich übergehenden speciellen Complexen involutorisch.

Nr. 8 entsteht aus Nr. 7, wenn man $\sigma_2=0$ setzt. In sich werden $p_1+p_4=0$ und $p_2=0$ transformirt; in $p_2=0$ sind fünf specielle Complexe zusammengefallen.

[1]) Vgl. Wedekind: Quadratsummen. Parameterdarstellungen quadratischer Mannigfaltigkeiten. Involutorische lineare Transformationen. (In der Festgabe der technischen Hochschule zu Karlsruhe zum Regierungsjubiläum des Grossherzogs Friedrich von Baden.) In dieser Arbeit werden specielle Gattungen uneigentlicher Transformationen behandelt; zweimal nach einander angewandt ergeben sie die Identität. Sie stellen, geometrisch zu sprechen, eine Spiegelung an einer linearen Mannigfaltigkeit dar. Vergl. ferner Voss: Annalen XIII, p. 341. (Specielle Substitutionen.)

Nr. 9. In sich werden die zwei involutorisch gelegenen speciellen Complexe $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$ transformirt; in jedem dieser zwei Complexe sind drei specielle Complexe zusammengefallen.

Nr. 10. Durch die Hauptformeln werden:

$$\begin{aligned}
&1)\ p_1 + p_4 = 0 && \text{in } -(p'_1 + p'_4) = 0,\\
&2)\ p_2 + p_5 = 0 && ,, \ -(p'_2 + p'_5) = 0,\\
&3)\ p_3 + p_6 = 0 && ,, \ -(p'_3 + p'_6) = 0,\\
&4)\ p_2 - p_5 = 0 && ,, \ p'_2 - p'_5 = 0,\\
&5)\ p_1 - p_4 + i(p_3 - p_6) = 0 && ,, \ \frac{4k + \sigma_1 i}{4k - \sigma_1 i}\Big(p'_1 - p'_4 + i(p'_3 - p'_6)\Big) = 0,\\
&6)\ p_1 - p_4 + i(p_6 - p_3) = 0 && ,, \ \frac{4k - \sigma_1 i}{4k + \sigma_1 i}\Big(p'_1 - p'_4 + i(p'_6 - p'_3)\Big) = 0
\end{aligned}$$

transformirt.

Daher wird die zweifach unendliche Complexschaar:

$$\tau_1(p_1 + p_4) + \tau_2(p_2 + p_5) + \tau_3(p_3 + p_6) = 0$$

in sich übergeführt. Jeder Complex dieser Schaar ist involutorisch zu $p_2 - p_5 = 0$, sowie zu den zwei speciellen Complexen. Letztere sind auch zu $p_2 - p_5 = 0$ involutorisch. Daher sind die Achsen der zwei speciellen Complexe die zwei Geraden, welche den vier Complexen $p_1 + p_4 = 0$, $p_2 + p_5 = 0$, $p_3 + p_6 = 0$, $p_2 - p_5 = 0$ gemein sind.

Setzt man $\sigma_2 = 0$, so ergiebt sich, dass die zwei zweifach unendlichen Complexschaaren:

$$\begin{aligned}
&\tau_1(p_1 + p_4) + \tau_2(p_2 + p_5) + \tau_3(p_3 + p_6) = 0\\
&\tau_1(p_1 - p_4) + \tau_2(p_2 - p_5) + \tau_3(p_3 - p_6) = 0
\end{aligned}$$

in sich übergeführt werden. Jeder Complex der ersten Schaar ist involutorisch zu jedem Complex der zweiten Schaar. Diese Transformation vermittelt eine wechselseitige, also involutorische Verwandtschaft zwischen der Gesammtheit aller Geraden. In sich gehen alle Geraden über, die gleichzeitig:

$$p_1 + p_4 = 0,\ p_2 + p_5 = 0,\ p_3 + p_6 = 0$$

oder

$$p_1 - p_4 = 0,\ p_2 - p_5 = 0,\ p_3 - p_6 = 0$$

angehören.

Nr. 11. In sich werden die zweifach unendliche Complexschaar:

$$\tau_1(p_1 + p_4) + \tau_2 p_3 + \tau_3(\lambda p_1 + p_6) = 0$$

und der zu dieser Schaar involutorisch gelegene specielle Complex $p_2 = 0$ transformirt.[1])

Wir werfen noch in Kürze einen Blick auf die Complexe zweiten Grades, welche durch unsere Correlationen in sich übergehen. Einer von denselben hat eine einfache geometrische Bedeutung; dieser soll allein angegeben werden. Man kann sich nach den Geraden fragen, welche von den ihnen entsprechenden geschnitten werden. Die Bedingung hierfür ist: $\Sigma p_k p'_{k+3} = 0$, wo $k+3$ (mod 6) zu nehmen ist. Nach p. 28 geht dieser Complex in sich über; jede Gerade dieses Complexes schneidet zwei Flächen zweiten Grades harmonisch.[2])

In Nr. 1 ist die Gleichung dieses Complexes:

$$-(p_1^2+p_4^2)+2\cdot\frac{4k^2+\sigma_2^2}{4k^2-\sigma_2^2}p_3p_6+2\cdot\frac{4k^2+\sigma_1^2}{4k^2-\sigma_1^2}p_2p_5+\frac{16k^2\sigma_3}{(4k^2-\sigma_1^2)(4k^2-\sigma_2^2)}p_2p_6=0.$$

Für die übrigen Fälle übergehen wir die Angabe der Gleichungen.

Wir haben hiermit unsere Betrachtungen über Correlationen erledigt. Wir erwähnen nur noch, wie man Transformationsformeln für Correlationen finden kann, die einen gegebenen linearen Complex in sich transformiren. Man wähle diesen, falls er allgemein ist, zur v Mannigfaltigkeit und stelle dann Transformationsformeln auf, so geht der gegebene Complex sicher in sich über. Ist der Complex, der in sich transformirt werden soll, speciell, so wählt man ihn am vortheilhaftesten zur w Ebene und gebe dann, indem man noch die v Ebene willkürlich, nur zur w Ebene conjugirt, wählen kann, die Transformationsformeln an. Unsere Betrachtungen zeigen auch, dass man drei allgemeine lineare Complexe beliebig geben kann und dann die Transformationsformeln für die Correlation suchen kann, die diese drei Complexe gleichzeitig in sich überführen.

---

[1]) In den betreffenden Angaben in Clebsch-Lindemann II, 1, p. 408, Nr. 5, sowie p. 412, Nr. 12, haben sich einige Rechenfehler eingeschlichen. In der Tabelle p. 413 sind Nr. 3 und Nr. 4 zu streichen. Die dortigen Resultate sind dann dieselben wie die unserigen, welche nach einer allgemeinen Methode hergeleitet wurden. Specielle Complexe, welche fest bleiben, sind von Herrn Lindemann nicht betrachtet worden.

[2]) Ueber diese Gattung Complexe vergl. Segre und Loria: Sur les différentes espèces de complexes, qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre. Math. Annalen, Bd. 23. Ferner Segre: Ricerche sulle omografie etc., p. 23. Clebsch-Lindemann II, 1, p. 404. Ernst: Ueber die Complexe zweiten Grades, welche durch Flächenpaare zweiten Grades erzeugt werden. (Gekrönte Preisschrift.) München 1885.

§ 7.

Die Darboux'sche Kugelgeometrie und die Transformation durch reciproke Radien.

Für den Fall von fünf Variablen bietet sich als Anwendungsfeld für unsere Transformationen die von Darboux in die Wissenschaft eingeführte Kugelgeometrie oder Geometrie der pentasphärischen Coordinaten.[1]) Diese ist dadurch charakterisirt, dass sie die Punkte des R_3 sich aus einem 4 dimensionalen Raume R_4 durch eine quadratische Gleichung ausgeschieden denkt. Um das Coordinatensystem zu definiren, legen wir fünf Kugeln (S_k) $k = 1, 2, 3, 4, 5$ mit den Radien R_k unserer Betrachtung zu Grunde.

Je zwei dieser Kugeln sollen sich orthogonal schneiden. Mit S_k sei die Potenz eines Punktes in Bezug auf die k^{te} Kugel bezeichnet, dann sind die fünf homogenen pentasphärischen Coordinaten s_k definirt als:

$$s_k = \lambda \frac{S_k}{R_k},$$

wo $k = 1, 2, 3, 4, 5$ und λ ein Proportionalitätsfactor ist. Zwischen den s_k als überschüssigen Coordinaten besteht die quadratische Relation:

$$1) \quad S = \sum_{k=1}^{k=5} s_k^2 = 0.$$

Sind fünf willkürliche Grössen, welche nur die Relation 1 erfüllen, gegeben, so bestimmen sie stets einen Punkt des R_3. Wir müssen noch bemerken, dass auch einige der Coordinatenkugeln in Ebenen übergehen können, dann ist für die Potenz S_k der doppelte Abstand des betrachteten Punktes von dieser Coordinatenebene zu setzen. Sind die fünf Grössen s_k ausser durch die quadratische Relation 1 noch durch die lineare Gleichung:

$$2) \quad \sum_1^5 m_k s_k = 0,$$

[1]) Darboux befand sich schon 1868 im Besitze derselben. Vergl. F. Klein: Annalen V, p. 259 und 261: Liniengeometrie und metrische Geometrie, sowie die wichtige Abhandlung von S. Lie: Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe mit Anwendungen auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Annalen V, p. 187. Ausführlicher dargestellt wurde die Kugelgeometrie 1873 von Darboux selbst in: „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces", p. 131 und p. 256 ff. („sur un nouveau système de coordonnées"). Vergl. G. Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces. Vol. I, livre II, chapitre VI, p. 213: Les coordonnées pentasphériques.

wo die m_k Constanten sind, verknüpft, so wird durch die Gesammtheit aller derjenigen Punkte, deren Coordinaten den Gleichungen 1 und 2 gleichzeitig genügen, eine Kugel (im speciellen Falle, falls $\sum_1^5 \frac{m_k}{R_k} = 0$ ist, eine Ebene) bestimmt. Ist $\sum_1^5 m_k^2 = 0$, so ist die Kugel in einen Punkt mit den pentasphärischen Coordinaten m_k degenerirt. Zwei gegebene Kugeln

$$\sum_{k=1}^{k=5} m_k s_k = 0 \text{ und } \sum_{k=1}^{k=5} m'_k s_k = 0$$

schneiden sich orthogonal, falls die simultane Invariante $\sum_1^5 m_k m'_k = 0$ ist. Ist in der Kugelgleichung ein $m_k = 0$, so bedeutet dies: die Kugel schneidet die Coordinatenkugel S_k orthogonal. Auch in der Darboux'schen Kugel-, wie in der Plücker'schen Liniengeometrie hat, wenn zwei Punkte mit den Coordinaten s_k und s'_k gegeben sind, die Polarform

$$\sum_{k=1}^{k=5} \frac{\partial S}{\partial s_k} s'_k = 0$$

eine geometrische Bedeutung; sie sagt aus: die zwei Punkte haben verschwindenden Abstand.[1])

Im Folgenden werden uns hauptsächlich lineare Transformationen der s_k beschäftigen, welche $\sum_{k=1}^{k=5} s_k^2 = 0$ in sich überführen. Es gilt nun der wichtige Satz des Herrn Felix Klein[2]):

Der Gesammtheit der linearen Transformationen des R_4, welche die

$$M_3^{(2)} : \sum_1^5 s_i^2 = 0$$

in sich überführen, entspricht im R_3 ein Transformationscyklus, der sich aus dessen Bewegungen, den Aehnlichkeitstransformationen und den Transformationen durch reciproke Radien zusammensetzt.

Man kann diesen Satz auf eine von dem Klein'schen Beweise verschiedene Art darthun. Bei cogredienten linearen Transformationen, die $S = 0$ in sich überführen, wird auch die Polarform

$$\sum_{i=1}^{i=5} \frac{\partial S}{\partial s_i} s'_i$$

---

[1]) Verschwindender Abstand heisst nicht etwa zusammenfallen; denn wir betrachten auch imaginäre Punkte. Solche Punkte sind Punkte einer Minimalkurve.

[2]) Annalen V, p. 267.

in sich transformirt; daher gehen Punkte mit verschwindender Distanz in analoge über und daher Minimalkurven in Minimalkurven. Folglich ist die Transformation für den Uebergang von zwei Flächen in einander conform, d. h. sie erhält die Winkel, denn zur conformen Abbildung von zwei Flächen auf einander ist das Uebergehen der Minimalkurven der einen Fläche in die der anderen nothwendig und hinreichend. Durch unsere Transformation werden Kugeln in Kugeln übergeführt; da die Minimalkurven auf der Kugel zwei Schaaren von Minimalgeraden sind, so gehen Minimalgerade in Minimalgerade über. In Folge dessen können wir zeigen, dass der Winkel von zwei sich schneidenden Geraden bei der Transformation erhalten bleibt. Der Winkel von zwei Geraden ist unter Hinzufügung der zwei durch ihren Schnittpunkt gehenden, mit ihnen in einer Ebene liegenden Minimallinien definirt als $\frac{i}{2}l$ (Doppelverhältniss der vier Geraden). Bei unserer Transformation gehen Minimalgerade in Minimalgerade über; es bilden sich daher die vier schneidenden Geraden auf eine Kugel als zwei durch einen Punkt gehende Kurven und zwei durch denselben Punkt gehende Minimalgerade oder auf eine Ebene als vier Gerade eines Büschels, von denen zwei Minimalgerade sind, ab; da jede Transformation im Unendlichkleinen linear ist, so bleibt das Doppelverhältniss und folglich der Winkel erhalten. Da der Winkel von zwei sich schneidenden Geraden erhalten bleibt, so auch der von Ebenen und der Schnittwinkel von Flächen, d. h. ihrer Tangentialebenen.[1]) Nun gilt der Satz von Liouville:[2]) „Jede Punkttransformation, bei der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen statthat, lässt sich aus einer Transformation durch reciproke Radien, einer Bewegung und einer Aehnlichkeitsformation zusammensetzen.“ Hiermit ist der Satz des Herrn Klein bewiesen.

Man ersieht also, dass man durch Diskussion der Gleichung $S = 0$ den gesammten Theil der metrischen Geometrie erhält, der durch reciproke Radien ungeändert bleibt, wie sich die gesammte Liniengeometrie an die Diskussion der entsprechenden Gleichung $P = 0$ anknüpft.

Bevor wir auf diese Aufgabe eingehen, geben wir noch die Formeln für den Uebergang von pentasphärischen zu homogenen Coordinaten. Seien

[1]) In Bezug auf derartige Beweise vergl. Clebsch-Lindemann II, 1, p. 428.

[2]) Liouville in den Anmerkungen zu Monge's Applications de l'analyse. Note VI, p. 609—616. Vergl Lie: Annalen V, p. 184.

$x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ die vier homogenen Coordinaten eines Punktes, des R_3, so kann man fünf Grössen durch folgende Definitionen einführen:

$$S_1 = x_4^2,\ S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ s_3 = x_1 x_4,\ s_4 = x_2 x_4,\ s_5 = x_3 x_4.$$

Zwischen diesen fünf Grössen besteht dann die Relation:

$$s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 - S_1 S_2 = 0.$$

Definirt man daher $s_1\, s_2$ durch folgende Gleichungen:

$$S_1 = s_1 + i s_2,\ S_2 = -(s_1 - i s_2),$$

so besteht zwischen den s_i die gewünschte Relation:

$$\sum_1^5 s_i^2 = 0.$$

Die fünf Grössen s_i sind daher als pentasphärische Coordinaten zu betrachten, es ist:

$$s_1 = \frac{S_1 - S_2}{2} = \frac{x_4^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{2},$$

$$s_2 = \frac{S_1 + S_2}{2i} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{2i},$$

$$s_3 = x_1 x_4,\ s_4 = x_2 x_4,\ s_5 = x_3 x_4.$$

Unsere fünf Fundamentalkugeln sind die drei rechtwinkeligen Coordinatenebenen: 1) $x = 0$, 2) $y = 0$, 3) $z = 0$, sowie die zwei Kugeln: 4) $x^2 + y^2 + z^2 = +1$, 5) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$.[1])

Die homogenen Coordinaten $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ drücken sich durch die pentasphärischen Coordinaten s_i auf folgende Weise aus:

$$x_1 = \frac{s_3}{\sqrt{s_1 + i s_2}},\quad x_2 = \frac{s_4}{\sqrt{s_1 + i s_2}},$$

$$x_3 = \frac{s_5}{\sqrt{s_1 + i s_2}},\quad x_4 = \sqrt{s_1 + i s_2}.$$

Aus diesen Transformationsformeln ersieht man, dass, wenn ausser der Relation $S = 0$ zwischen den s_i noch eine beliebige quadratische Gleichung besteht, sie sich in homogenen Coordinaten:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + f_1 x_4 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + f_2 x_4^2 = 0$$

schreiben lässt; hierbei sind f_1 und f_2 Ausdrücke ersten bez. zweiten Grades in den x. Eine Fläche, welche durch die obere Gleichung repräsentirt wird, heisst eine allgemeine Cyklide.

---

[1]) Eine Coordinatenkugel ist nulltheilig, d. h. sie hat rein imaginären Radius. Von fünf Kugeln, die sich zu je zwei orthogonal schneiden, muss stets eine, kann aber auch nur eine, nulltheilig sein.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen beschäftigen wir uns jetzt mit den Transformationen der Gleichung $S = 0$ in sich. Diesen entsprechen Bewegungen, Aehnlichkeitstransformationen und Transformationen durch reciproke Radien. Unter dieser Gruppe von Transformationen giebt es eine besonders wichtige und interessante Gruppe, nämlich diejenige, bei welcher die unendlichferne Ebene in sich übergeht. Bei dieser speciellen Gattung von Transformationen transformirt sich, wie bei der allgemeinen Transformation, der unendlich ferne Kugelkreis in den unendlichfernen Kugelkreis, sowie die unendlich ferne Ebene in sich selbst. Daher wird

$$x_2 + y^2 + z^2 \text{ in } m\,[(x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z' - c)^2]$$

übergehen, wenn der Nullpunkt sich in den Punkt mit den Coordinaten a, b, c transformirt; m ist eine Constante. Die Transformationen dieser speciellen Gruppe setzen sich aus Translationen, Rotationen, Spiegelungen und Aehnlichkeitstransformationen zusammen.[1]) Man kann es auch stets so einrichten, dass $m = 1$ wird, dann bleiben nicht nur die Winkel, sondern auch alle Maassverhältnisse ungeändert.[2]) Wir haben dann nur eine Bewegung des Raumes. Damit die unendlich ferne Ebene in sich übergehe, braucht nur $s_1 + i s_2$ in sich transformirt zu werden.[3]) Transformirt man $x^2 + y^2 + z^2$ in $m\ (x'^2 + y'^2 + z'^2)$, so sind Translationen ausgeschlossen.

Die verschiedenen Möglichkeiten für die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Transformation, die S in sich überführt, sind:

a. für uneigentliche Transformationen:

	Paare reciproker Wurzeln	Wurzeln -1	Wurzeln $+1$
1)	2	1	0
2)	1 Paar Doppelwurzeln	1	0
3)	1	1	2
4)	0	1	4
5)	1	3	0
6)	0	3	2
7)	0	5	0

[1]) Von einem ganz anderen Gesichtspunkte ist diese Gruppe in Clebsch-Lindemann II, p. 373—383, betrachtet.

[2]) Vergl. F. Klein: Ueber die nichteuklidische Geometrie. Annalen IV, p. 602 und 603.

[3]) Man beachte: Die unendlichferne Ebene $x_4 = 0$ stellt sich in pentasphärischen Coordinaten wie ein Punkt dar; dasselbe gilt von dem unendlichfernen Kugelkreise, nämlich $s_1 - i s_2 = 0$, auf ihr.

b. für eigentliche Transformationen:

	Paare reciproker Wurzeln	Wurzeln − 1	Wurzeln + 1
1)	2	0	1
2)	1 Paar Doppelwurzeln	0	1
3)	1	2	1
4)	0	4	1
5)	1	0	3
6)	0	2	3
7)	0	0	5

Bei einer ungeraden Anzahl von Variablen sind eigentliche von den uneigentlichen Transformationen nicht wesentlich verschieden.

Wir betrachten nur die uneigentlichen Transformationen:

Da S eine orthogonale Form ist und wir nur reelle Substitutionen betrachten, die S in sich transformiren, so hat die charakteristische Function lauter einfache Elementarteiler und ihre sämmtlichen Wurzeln sind vom absoluten Betrage Eins.[1])

Nr. 1. Die t seien auf eine Ebene v beschränkt, als diese sei $s_5 = 0$ gewählt; zur w[2]) Ebene nehmen wir $u_1 s_1 + u_2 s_2 + u_3 s_3 + u_4 s_4 = 0$. Dann ergiebt sich:

$$\begin{array}{l|l} s_1 = k u_1 + \lambda_1 u_4 & s'_1 = k u_1 - \lambda_1 u_4 \\ s_2 = k u_2 + \lambda_2 u_3 & s'_2 = k u_2 - \lambda_2 u_3 \\ s_3 = k u_3 - \lambda_2 u_2 & s'_3 = k u_3 + \lambda_2 u_2 \\ s_4 = k u_4 - \lambda_1 u_1 & s'_4 = k u_4 + \lambda_1 u_1 \\ s_5 = v & s'_5 = -v\,. \end{array}$$

Durch Elimination der u und v findet man:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{k^2 - \lambda_1^2}{k^2 + \lambda_1^2} s'_1 + \frac{2 k \lambda_1}{k^2 + \lambda_1^2} s'_4 \\ s_2 &= \frac{k^2 - \lambda_2^2}{k^2 + \lambda_2^2} s'_2 + \frac{2 k \lambda_2}{k^2 + \lambda_2^2} s'_3 \\ s_3 &= \frac{k^2 - \lambda_2^2}{k^2 + \lambda_2^2} s'_3 - \frac{2 k \lambda_2}{k^2 + \lambda_2^2} s'_2 \\ s_4 &= \frac{k^2 - \lambda_1^2}{k^2 + \lambda_1^2} s'_4 - \frac{2 k \lambda_1}{k^2 + \lambda_1^2} s'_1 \\ s_5 &= -s'_5\,. \end{aligned}$$

[1]) Vergl. Voss: Ueber die cogredienten Transformationen u. s. w. p. 33 ff. Frobenius: Crelle's Journal, Bd. 84, p. 51 ff.

[2]) Wir haben entsprechend unseren Betrachtungen p. 26 die w Ebene mit variablen Coefficienten gewählt.

Die charakteristische Gleichung ist:

$$(\varrho+1)\left(\varrho-\frac{k+\lambda_1 i}{k-\lambda_1 i}\right)\left(\varrho-\frac{k-\lambda_1 i}{k+\lambda_1 i}\right)\cdot\left(\varrho-\frac{k+\lambda_2 i}{k-\lambda_2 i}\right)\cdot\left(\varrho-\frac{k-\lambda_2 i}{k+\lambda_2 i}\right)=0.$$

Sie hat die einfache Wurzel -1 und zwei Paare reciproker Wurzeln.

In rechtwinkeligen Coordinaten ergeben sich die Transformationsformeln:

$$x=-\frac{\lambda'(k^2+\lambda_1^2)}{k(\lambda_1^2+\lambda'^2)}+m\,\frac{\frac{\lambda_1^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\left(x'+\frac{\lambda'}{k}\frac{k^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)-\frac{2\lambda_1\lambda'}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\left(y'+\frac{\lambda_1}{k}\frac{k^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)}{\left(x'+\frac{\lambda'}{k}\frac{k^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)^2+\left(y'+\frac{\lambda_1}{k}\frac{k^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)^2+z'^2}$$

$$y=\frac{\lambda_1}{k}\left(\frac{k^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)+m\,\frac{-\frac{\lambda_1^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\left(y'+\frac{\lambda_1}{k}\frac{k^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)-\frac{2\lambda_1\lambda'}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\left(x'+\frac{\lambda'}{k}\frac{k^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)}{\left(x'+\frac{\lambda'}{k}\frac{k^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)^2+\left(y'+\frac{\lambda_1}{k}\frac{k^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)^2+z'^2}$$

$$z=\frac{-mz'}{\left(x'+\frac{\lambda'}{k}\frac{k^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)^2+\left(y'+\frac{\lambda_1}{k}\frac{k^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)^2+z'^2}$$

Man kann diese Transformation auf folgende Art zerlegen:

$$\xi=\frac{m\left(x'+\frac{\lambda'}{k}\frac{k^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)}{\left(x'+\frac{\lambda'}{k}\frac{k^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)^2+\left(y'+\frac{\lambda_1}{k}\frac{k^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)^2+z'^2}$$

$$\eta=\frac{m\left(y'+\frac{\lambda_1}{k}\frac{k^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)}{\left(x'+\frac{\lambda'}{k}\frac{k^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)^2+\left(y'+\frac{\lambda_1}{k}\frac{k^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)^2+z'^2}$$

$$\zeta=\frac{mz'}{\left(x'+\frac{\lambda'}{k}\frac{k^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)^2+\left(y'+\frac{\lambda_1}{k}\frac{k^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}\right)^2+z'^2}$$

Diese Formeln geben eine Transformation durch reciproke Radien von einem Pol O mit den Coordinaten:

$$-\frac{\lambda'}{k}\frac{k^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2},\quad -\frac{\lambda_1}{k}\frac{k^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2},\quad 0.$$

Seien P und P' zwei zugeordnete Punkte, so ist $OP\,.\,OP'=m$.

$$x=\frac{\lambda'}{k}\frac{k^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}+\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi,$$

$$y=\frac{\lambda_1}{k}\frac{k^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2}-(\xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi),$$

$$z=-\zeta.$$

Dieser letzte Theil der Transformation besteht in einer Raumverschiebung in der Richtung der x und y Achse, in einer Spiegelung an der z Ebene, ferner in einer Drehung um die z Achse und schliesslich in einer Spiegelung an der y Ebene.

Die Bedeutung der neu eingeführten Constanten ist folgende:

$$\lambda' = i\lambda_2,\ m = \frac{(k^2+\lambda_1^2).(k^2+\lambda_2^2)}{k(\lambda_1^2-\lambda_2^2)} = \frac{(k^2+\lambda_1^2)(k^2-\lambda'^2)}{k(\lambda_1^2+\lambda'^2)}.$$

$$\cos\varphi = \frac{\lambda_1^2-\lambda'^2}{\lambda_1^2+\lambda'^2},\ \sin\varphi = \frac{2\lambda_1\lambda'}{\lambda_1^2+\lambda'^2}.$$

Nr. 2. Man setze in Nr. 1 $\lambda_1 = \lambda_2$, dann ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{k^2-\lambda_1^2}{k^2+\lambda_1^2}s'_1 + \frac{2k\lambda_1}{k^2+\lambda_1^2}s'_4\\
s_2 &= \frac{k^2-\lambda_1^2}{k^2+\lambda_1^2}s'_2 + \frac{2k\lambda_1}{k^2+\lambda_1^2}s'_3\\
s_3 &= \frac{k^2-\lambda_1^2}{k^2+\lambda_1^2}s'_3 - \frac{2k\lambda_1}{k^2+\lambda_1^2}s'_2\\
s_4 &= \frac{k^2-\lambda_1^2}{k^2+\lambda_1^2}s'_4 - \frac{2k\lambda_1}{k^2+\lambda_1^2}s'_1\\
s_5 &= -s'_5.
\end{aligned}$$

Die charakteristische Function der Transformation ist:

$$\begin{vmatrix}
\varrho-\frac{k^2-\lambda_1^2}{k^2+\lambda_1^2} & 0 & 0 & -\frac{2k\lambda_1}{k^2+\lambda_1^2} & 0\\
0 & \varrho-\frac{k^2-\lambda_1^2}{k^2+\lambda_1^2} & -\frac{2k\lambda_1}{k^2+\lambda_1^2} & 0 & 0\\
0 & \frac{2k\lambda_1}{k^2+\lambda_1^2} & \varrho-\frac{k^2-\lambda_1^2}{k^2+\lambda_1^2} & 0 & 0\\
\frac{2k\lambda_1}{k^2+\lambda_1^2} & 0 & 0 & \varrho-\frac{k^2-\lambda_1^2}{k^2+\lambda_1^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \varrho+1.
\end{vmatrix}$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$(\varrho+1)\left(\varrho-\frac{k+\lambda_1 i}{k-\lambda_1 i}\right)^2\cdot\left(\varrho-\frac{k-\lambda_1 i}{k+\lambda_1 i}\right)^2.$$

Die Elementartheiler sind sämmtlich einfach; für jede der reciproken Doppelwurzeln verschwinden alle ersten Unterdeterminanten.

Nr. 3. Man setze in Nr. 1 $\lambda_2 = 0$, so ergiebt sich:

$$s_1 = \frac{k^2 - \lambda_1^2}{k^2 + \lambda_1^2} s'_1 + \frac{2k\lambda_1}{k^2 + \lambda_1^2} s'_4$$
$$s_2 = s'_2, \; s_3 = s'_3, \; s_5 = -s'_5$$
$$s_4 = \frac{k^2 - \lambda_1^2}{k^2 + \lambda_1^2} s'_4 - \frac{2k\lambda_1}{k^2 + \lambda_1^2} s'_1 .$$

Die charakteristische Gleichung ist:

$$(\varrho + 1)\,(\varrho - 1)^2 \cdot \left(\varrho - \frac{k + \lambda_1 i}{k - \lambda_1 i}\right)\left(\varrho - \frac{k - \lambda_1 i}{k + \lambda_1 i}\right).$$

Für die Doppelwurzel $+1$ verschwinden alle ersten Unterdeterminanten der charakteristischen Function. Die Elementartheiler sind sämmtlich einfach.

Nr. 4. Man setze in Nr. 1 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, so ist:

$$s_1 = s'_1, \; s_2 = s'_2, \; s_3 = s'_3, \; s_4 = s'_4, \; s_5 = -s'_5 .$$

Die charakteristische Gleichung ist:

$$(\varrho - 1)^4 \cdot (\varrho + 1) = 0 .$$

Für die vierfache Wurzel $+1$ verschwinden alle ersten, zweiten und dritten Unterdeterminanten der charakteristischen Function. Die Elementartheiler sind sämmtlich einfach.

Nr. 5. $k = 0$ in Nr. 1 gesetzt, so wird:

$$s_1 = -s'_1, \; s_2 = -s'_2, \; s_3 = -s'_3, \; s_4 = -s'_4, \; s_5 = -s'_5 .$$

Die charakteristische Gleichung hat die fünffache Wurzel -1, für diese verschwinden alle ersten, zweiten, dritten und vierten Unterdeterminanten der charakteristischen Function. Die Elementartheiler sind einfach.

Nr. 6. Man beschränke die Hilfspunkte t auf die drei Mannigfaltigkeiten: $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, und wähle zur w[1]) Ebene:

$$u_4 s_4 + u_5 s_5 = 0 \; ^1)$$

$s_1 = v$	$s'_1 = -v$
$s_2 = v'$	$s'_2 = -v'$
$s_3 = v''$	$s'_3 = -v''$
$s_4 = 4ku_4 + \lambda_1 u_5$	$s'_4 = 4ku_4 - \lambda_1 u_5$
$s_5 = 4ku_5 - \lambda_1 u_4$	$s'_5 = 4ku_5 + \lambda_1 u_4$.

[1]) Wir haben wieder die w Ebene mit variablen Coefficienten u gewählt.

Durch Elimination der Grössen u und v findet man:

$$s_1 = -s'_1,\ s_2 = -s'_2,\ s_3 = -s'_3$$

$$s_4 = \frac{16k^2 - \lambda_1^2}{16k^2 + \lambda_1^2}\, s'_4 + \frac{8k\lambda_1}{16k^2 + \lambda_1^2}\, s'_5$$

$$s_5 = \frac{16k^2 - \lambda_1^2}{16k^2 + \lambda_1^2}\, s'_5 - \frac{8k\lambda_1}{16k^2 + \lambda_1^2}\, s'_4 .$$

Die charakteristische Function ist:

$$\begin{vmatrix} \varrho+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varrho - \frac{16k^2 - \lambda_1^2}{16k^2 + \lambda_1^2} & -\frac{8k\lambda_1}{16k^2 + \lambda_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8k\lambda_1}{16k^2 + \lambda_1^2} & \varrho - \frac{16k^2 - \lambda_1^2}{16k^2 + \lambda_1^2} \end{vmatrix}.$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$(\varrho+1)^3 \cdot \left(\varrho - \frac{4k - i\lambda_1}{4k + i\lambda_1}\right)\left(\varrho - \frac{4k + i\lambda_1}{4k - i\lambda_1}\right).$$

Für die dreifache Wurzel -1 verschwinden alle ersten und zweiten Unterdeterminanten. Die Elementartheiler sind einfach.

In rechtwinkeligen Coordinaten ergeben sich die Transformationsformeln:

$$x = x',\ y = \cos(\pi+\varphi)\, y' + \sin(\pi+\varphi)\, z'$$

$$z = \cos(\pi+\varphi)\, z' - \sin(\pi+\varphi)\, y'$$

$$\cos\varphi = \frac{16k^2 - \lambda_1^2}{16k^2 + \lambda_1^2},\ \sin\varphi = -\frac{8k\lambda_1}{16k^2 + \lambda_1^2}.$$

Die Transformation besteht in einer Rotation um die x Achse.

Nr. 7. Man setze $\lambda_1 = 0$ in Nr. 6, so hat man

$$s_1 = -s'_1,\ s_2 = -s'_2,\ s_3 = -s'_3,\ s_4 = s'_4,\ s_5 = s'_5 .$$

Die charakteristische Gleichung wird: $(\varrho+1)^3 \cdot (\varrho-1)^2 = 0$; für die dreifache Wurzel -1 verschwinden alle ersten und zweiten, für die Doppelwurzel $+1$ alle ersten Unterdeterminanten der charakteristischen Function[1]). Die Elementartheiler sind einfach.

---

[1]) Man könnte glauben $s_5 = 0$ und als conjugirte Mannigfaltigkeit $s_3 = 0$ oder eine Tangentialmannigfaltigkeit würde neue Resultate liefern, doch ist dies nicht der Fall. Die Resultate sind wie in Nr. 3. Vergl. übrigens p. 57.

Nimmt man in Nr. 1 bis Nr. 5 $s_5 = s'_5$, in Nr. 6 und 7 $s_1 = s'_1$, $s_2 = s'_2$, $s_3 = s'_3$, so findet man die eigentlichen Transformationen. Auf diesem Wege findet man für ungerades n die uneigentlichen Transformationen allgemein aus den eigentlichen. Für gerades n ist diese Methode unbrauchbar.

§ 8.

Die bei einer Transformation durch reciproke Radien, welche mit Bewegung verbunden ist, in sich übergehenden Elemente.

Nach der allgemeinen Theorie geht stets eine ungerade Anzahl allgemeiner Mannigfaltigkeiten, d. h. ein oder drei Kugeln bez. Ebenen in sich über.

In Nr. 1 wird:

$$\begin{aligned}
&1)\ s_5 = 0 && \text{in } -s'_5 = 0,\\
&2)\ s_2 - i s_3 = 0 && \text{„ } \tfrac{k+\lambda_2 i}{k-\lambda_2 i}(s'_2 - i s'_3) = 0,\\
&3)\ s_2 + i s_3 = 0 && \text{„ } \tfrac{k-\lambda_2 i}{k+\lambda_2 i}(s'_2 + i s'_3) = 0,\\
&4)\ s_1 + i s_4 = 0 && \text{„ } \tfrac{k-\lambda_1 i}{k+\lambda_1 i}(s'_1 + i s'_4) = 0,\\
&5)\ s_1 - i s_4 = 0 && \text{„ } \tfrac{k+\lambda_1 i}{k-\lambda_1 i}(s'_1 - i s'_4) = 0
\end{aligned}$$

übergeführt.

Es bleiben die z Ebene, sowie die vier auf ihr gelegenen Punkte: $1, 0, 0 \mid -1, 0, 0 \mid 0, i, 0 \mid 0, -i, 0$ fest.

Die Cyklidenschaar:

$$\tau_1 s_5^2 + \tau_2 (s_2^2 + s_3^2) + \tau_3 (s_1^2 + s_4^2) = 0,$$

wo $\tau_1\ \tau_2\ \tau_3$ drei willkürliche Parameter sind, geht auch in sich über.

Man kann sich nach den Punkten fragen, die von ihren zugeordneten verschwindenden Abstand haben; man erhält sie aus:

$$\sum_{i=1}^{i=5} s_i s'_i = 0.$$

Sie erfüllen die Cyklide:

$$\frac{k^2-\lambda_1^2}{k^2+\lambda_1^2}(s_1^2+s_4^2) + \frac{k^2-\lambda_2^2}{k^2+\lambda_2^2}(s_2^2+s_3^2) - s_5^2 = 0.$$ [1])

[1]) Das Uebergehen von Cykliden in sich bei unserer Transformation hängt mit ihrem Charakter, anallagmatische Flächen zu sein, zusammen. (Darboux: Surfaces p. 258.) Man könnte durch unsere Betrachtungen weitere anallagmatische Flächen finden z. B. $(s_1^2+s_4^2)^2 + \tau_1 (s_2^2+s_3^2)^3 = 0$. Vergl. Sur une classe remarquable de courbes par Darboux, p. 120.

Nr. 2.

Die zwei Büschel:

$$\tau_1(s_1+is_4)+\tau_2(s_2+is_3)=0$$

und

$$\tau_1(s_1-is_4)+\tau_2(s_2-is_3)=0,$$

sowie $s_5=0$ werden in sich transformirt, d. h. die z Ebene, sowie alle Punkte mit den Coordinaten:

$$x=\frac{i\tau_2}{\tau_1+i\tau_2},\ y=\frac{i\tau_1}{\tau_1+i\tau_2},\ z=0,$$

$$x=-\frac{i\tau_2}{\tau_1+i\tau_2},\ y=-\frac{i\tau_1}{\tau_1+i\tau_2},\ z=0,$$

gehen in sich über.

Diese Punkte erfüllen die zwei Geraden: $(x-1)i=\pm y$ in der z Ebene.

Nr. 3. In sich gehen die drei Mannigfaltigkeiten $s_2=0$, $s_3=0$, $s_5=0$, sowie das Büschel $\tau_1 s_2+\tau_2 s_3=0$ über, ferner die zwei Punkte:

$$s_1+is_4=0 \text{ in } \frac{k-\lambda_1 i}{k+\lambda_1 i}(s_1'+is_4'),$$

$$s_1-is_4=0 \text{ „ } \frac{k+\lambda_1 i}{k-\lambda_1 i}(s_1'-is_4').$$

Das Büschel $\tau_1 s_2+\tau_2 s_3=0$ enthält die zwei in sich übergehenden Punkte:

$$s_2+is_3=0,\ s_2-is_3=0.$$

Es werden also die z und x Ebene, sowie die Kugel $(x^2+y^2+z^2+1)=0$, die Kugelschaar

$$\tau_1(x^2+y^2+z^2+1)+\tau_2 x=0,$$

ferner die vier Punkte:

$$|1,\ 0,\ 0|,\ |-1,\ 0,\ 0|,\ |0,\ i,\ 0|,\ |0,\ -i,\ 0|$$

der z Ebene in sich übergeführt.

Die Punkte, welche von ihren zugeordneten verschwindende Distanz haben, erfüllen die Cyklide:

$$\frac{k^2-\lambda_1^2}{k^2-\lambda_1^2}(s_1^2+s_4^2)+s_2^2+s_3^2-s_5^2=0.$$

Nr. 4. In sich geht das dreifach unendliche Büschel:

$$\tau_1 s_1+\tau_2 s_2+\tau_3 s_3+\tau_4 s_4=0,$$

sowie $s_5=0$ über.

Nr. 5 stellt keine Raumtransformation vor.

Nr. 6. $\tau_1 s_1 + \tau_2 s_2 + \tau_3 s_3 = 0$ wird in sich transformirt, daher auch die unendlich ferne Ebene $s_1 + i s_2 = 0$, da auch $s_1 - i s_2 = 0$ in sich übergeht, bleibt der unendlichferne Kugelkreis fest. Die zwei speciellen Mannigfaltigkeiten: $s_4 + i s_5 = 0$ und $s_4 - i s_5 = 0$ gehen in:

$$\frac{4k - \lambda_1 i}{4k + \lambda_1 i}(s'_4 + i s'_5) = 0$$

beziehentlich

$$\frac{4k + \lambda_1 i}{4k - \lambda_1 i}(s'_4 - i s'_5) = 0$$

über.

Daher werden die zweifach unendliche Kugelschaar:

$$\tau_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + \tau_2 (x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + \tau_3 x_1 x_4 = 0,$$

hierunter der imaginäre Kugelkreis, sowie die zwei Punkte: $0, 1, i, 0 \mid 0, 1, -i, 0$ auf ihm, in sich transformirt. Punkte, die von ihren zugeordneten verschwindenden Abstand haben, erfüllen die Cyklide:

$$-(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + \frac{16k^2 - \lambda_1^2}{16k^2 + \lambda_1^2}(s_4^2 + s_5^2) = 0.$$

Diese ist in $(x_2^2 + x_3^2) x_4^2 = 0$, also in vier Ebenen, nämlich $x_2 \pm x_3 i = 0$, sowie die doppelt zu zählende unendlichferne Ebene $x_4 = 0$ degenerirt.

In Nr. 7 geht:

$$\tau_1 s_1 + \tau_2 s_2 + \tau_3 s_3 = 0,$$

sowie

$$\mu_1 s_4 + \mu_2 s_5 = 0$$

in sich über. Jede Kugel der ersten Schaar wird von jeder der zweiten orthogonal geschnitten.

§ 9.

Die conformen Punkttransformationen, welche die Punkte der unendlich fernen Ebene in sich überführen.

Die Eigenschaften der Transformationsgruppe, deren Untersuchung dieser Paragraph gewidmet sein soll, haben wir schon p. 48 angegeben, daher werden wir nur noch die kanonischen Formen aufzustellen haben. In Nr. 1 (p. 49 und 54) geht $s_1 + i s_4 = 0$ in sich über, vertauscht man in den dortigen Formeln s_2 und s_4, so ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \frac{k^2-\lambda_1^2}{k^2+\lambda_1^2}\, s'_1 + \frac{2k\lambda_1}{k^2+\lambda_1^2}\, s'_2 \\
s_2 &= \frac{k^2-\lambda_1^2}{k^2+\lambda_1^2}\, s'_2 - \frac{2k\lambda_1}{k^2+\lambda_1^2}\, s'_1 \\
s_3 &= \frac{k^2-\lambda_2^2}{k^2+\lambda_2^2}\, s'_3 - \frac{2k\lambda_2}{k^2+\lambda_2^2}\, s'_4 \\
s_4 &= \frac{k^2-\lambda_2^2}{k^2+\lambda_2^2}\, s'_4 + \frac{2k\lambda_2}{k^2+\lambda_2^2}\, s'_3 \\
s_5 &= -s'_5 .
\end{aligned}
$$

In rechtwinkeligen Coordinaten ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{k+\lambda'}{k-\lambda'}\,(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi) \\
y &= \frac{k+\lambda'}{k-\lambda'}\,(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) \\
z &= -\frac{k+\lambda'}{k-\lambda'}\, z' .
\end{aligned}
$$

Hierbei ist:

$$\lambda' = i\lambda_1,\quad \cos\varphi = \frac{k^2-\lambda_2^2}{k^2+\lambda_2^2},\quad \sin\varphi = \frac{2k\lambda_2}{k^2+\lambda_2^2}.$$

Die Transformation besteht in einer Drehung um die z Achse, Spiegelung an der z Ebene und Aenderung der Maassverhältnisse um $\frac{k+\lambda'}{k-\lambda'}$.

Es werden:

$$
\begin{aligned}
&1)\ s_5 = 0 && \text{in } -s'_5 = 0 \\
&2)\ s_1 + i s_2 = 0 && ,, \ \frac{k-\lambda_1 i}{k+\lambda_1 i}\,(s'_1 + i s'_2) = 0 \\
&3)\ s_1 - i s_2 = 0 && ,, \ \frac{k+\lambda_1 i}{k-\lambda_1 i}\,(s'_1 - i s'_2) = 0 \\
&4)\ s_3 + i s_4 = 0 && ,, \ \frac{k+\lambda_2 i}{k-\lambda_2 i}\,(s'_3 + i s'_4) = 0 \\
&5)\ s_3 - i s_4 = 0 && ,, \ \frac{k-\lambda_2 i}{k+\lambda_2 i}\,(s'_3 - i s'_4) = 0
\end{aligned}
$$

transformirt.

Fest bleibt die z Ebene, die unendlichferne Ebene, auf dieser der unendlichferne Kugelkreis und die zwei Punkte $1, \pm i, 0, 0$, in denen letzterer von der z Ebene geschnitten wird.

Die allgemeinste Transformation des unendlichfernen Kugelkreises, sowie auch der unendlichfernen Ebene in sich, allerdings ohne Aenderung der Maassverhältnisse, findet man, falls man in den allgemeinen Transformationsformeln als v Ebene: $s_5 = 0$, als w Ebene: $s_1 + i s_2 = 0$ wählt.

$$\begin{aligned} s_1 &= ku_1 + \lambda_1 u_4 i \\ s_2' &= ku_2 - \lambda_1 u_4 \\ s_3 &= ku_3 + \lambda_2 u_4 \\ s_4 &= ku_4 + \lambda_1 (u_2 - u_1 i) - \lambda_2 u_3 \\ s_5 &= \nu . \end{aligned} \qquad \begin{aligned} s_1' &= ku_1 - \lambda_1 u_4 i \\ s_2' &= ku_2 + \lambda_1 u_4 \\ s_3' &= ku_3 - \lambda_2 u_4 \\ s_4' &= ku_4 - \lambda_1 (u_2 - u_1 i) + \lambda_2 u_3 \\ s_5' &= -\nu . \end{aligned}$$

Durch Elimination der u und ν erhält man:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{(k^2 + 2\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\, s_1' + 2\lambda_1^2 i s_2' - 2\lambda_1 \lambda_2 i s_3' + 2k\lambda_1 i s_4'}{k^2 + \lambda_2^2} \\ s_2 &= \frac{2\lambda_1^2 i s_1' + (k^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1^2)\, s_2' + 2\lambda_1 \lambda_2 s_3' - 2k\lambda_1 s_4'}{k^2 + \lambda_2^2} \\ s_3 &= \frac{-2\lambda_1 \lambda_2 i s_1' + 2\lambda_1 \lambda_2 s_2' + (k^2 - \lambda_2^2)\, s_3' + 2k\lambda_2 s_4'}{k^2 + \lambda_2^2} \\ s_4 &= \frac{(k^2 - \lambda_2^2)\, s_1' - 2k\lambda_2 s_2' - 2k\lambda_1 i s_3' + 2k\lambda_1 s_4'}{k^2 + \lambda_2^2} \\ s_5 &= -s_5' . \end{aligned}$$

In homogenen Coordinaten lauten die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2\lambda' \lambda_2}{k^2 + \lambda_2^2} x_4' + \cos\varphi\, x_1' + \sin\varphi\, x_2' \\ x_2 &= -\frac{2k\lambda'}{k^2 + \lambda_2^2} x_4' + \cos\varphi\, x_2' - \sin\varphi\, x_1' \\ x_3 &= -x_3' \\ x_4 &= x_4' . \end{aligned}$$

Hierbei bedeuten:

$$\lambda' = i\lambda_1, \quad \cos\varphi = \frac{k^2 - \lambda_2^2}{k^2 + \lambda_2^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2k\lambda_2}{k^2 + \lambda_2^2} .$$

Die allgemeinste reelle uneigentliche conforme Punkttransformation, welche die Punkte der unendlichfernen Ebene ungeändert lässt, setzt sich aus einer beliebigen Bewegung (Translation und Rotation) und einer Spiegelung an einer zur Axe der Bewegung senkrechten Ebene zusammen.[1]) Fest bleibt die unendlichferne Ebene $x_4 = 0$, ferner die Ebene $x_3 = 0$; die zwei speciellen Mannigfaltigkeiten:

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} s_1 - i\frac{\lambda_1}{\lambda_2} s_2 + i s_3 + s_4 = 0 \text{ und } \frac{\lambda_1}{\lambda_2} s_1 + i\frac{\lambda_1}{\lambda_2} s_2 - i s_3 + s_4 = 0$$

[1]) Vergl. Clebsch-Lindemann II, 1, p. 381.

gehen in

$$\frac{k+\lambda_2 i}{k-\lambda_2 i}\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}s'_1 - i\frac{\lambda_1}{\lambda_2}s'_2 + is'_3 + s'_4\right) = 0$$

bezüglich

$$\frac{k-\lambda_2 i}{k+\lambda_2 i}\left(+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}s'_1 + i\frac{\lambda_1}{\lambda_2}s'_2 - is'_3 + s'_4\right) = 0$$

über. Diese zwei speciellen Mannigfaltigkeiten sind die zwei Punkte $\pm i$, 1, 0, 0, in denen $x_3 = 0$ den unendlichfernen Kugelkreis trifft. In sich ohne Factor wird auch $\lambda_2 s_1 - \lambda' s_3 = 0$ und daher das Büschel:

$$\tau_1(\lambda_2 s_1 - \lambda' s_3) + \tau_2(s_1 + is_2) = 0$$

übergeführt.

Dieses Büschel enthält die zwei speciellen Mannigfaltigkeiten: $s_1 + is_2 = 0$, d. i. die unendliche Ebene, sowie

$$\frac{\lambda'^2 - \lambda_2^2}{\lambda'^2 + \lambda_2^2}s_1 + \frac{2\lambda'\lambda_2}{\lambda'^2 + \lambda_2^2}s_3 + is_2 = 0,$$

d. i. den Punkt $-\lambda'$, 0, 0, λ_2.

Das Büschel selbst hat in homogenen Coordinaten die Gleichung:

$$\left(x_1 + \frac{\lambda'}{\lambda_2}x_4\right)^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(1 + \frac{\lambda'^2}{\lambda_2^2} + \frac{2\tau_2}{\tau_1 . \lambda_2}\right)x_4^2$$

oder

$$\left(x_1 + \frac{\lambda'}{\lambda_2}x_4\right)^2 + x_2^2 + x_3^2 = \varrho x_4^2,$$

wo ϱ ein willkürlicher Parameter ist, der jeden beliebigen Werth annehmen kann. Es wird also eine Schaar concentrischer Kugeln in sich transformirt. Punkte, die von ihren zugeordneten verschwindenden Abstand haben, erfüllen die Cyklide:

$$(k^2 + \lambda_2^2)(s_1^2 + s_2^2) - 4\lambda'\lambda_2 s_3(s_1 + is_2) - 2\lambda'^2 . (s_1 + is_2)^2 + (k^2 - \lambda_2^2)(s_3^2 + s_4^2) = 0.$$

Diese ist der Rotationskegel:

$$2\lambda_2^2\left((x_1 + \frac{\lambda'}{\lambda_2}x_4)^2 + x_2^2\right) + (k^2 + \lambda_2^2)x_3^2 = 0.$$

Die Spitze dieses Kegels, der durch unsere Transformation in sich übergeführt wird, fällt mit dem Mittelpunkte der Schaar concentrischer Kugeln zusammen. Jede dieser Kugeln schneidet den Kegel in zwei Kreisen, seinen Krümmungscurven; die Punkte dieser zwei Kreise vertauschen sich bei der Transformation. Auch p. 56 hat man in Nr. 6 und 7 conforme Punkttransformationen, welche die Punkte der unendlichfernen Ebene ungeändert lassen.

§ 10.

Zusammenhang zwischen Darboux'scher Kugel- und Plücker'scher Liniengeometrie, sowie die Transformationen eines linearen Liniencomplexes in sich.

Die für die Darboux'sche Kugelgeometrie auseinandergesetzten Betrachtungen lassen sich sofort in die Sprache der Liniengeometrie übersetzen und für die Transformation eines linearen Liniencomplexes in sich verwerthen. Zwischen den Punkten des R_3 und den Geraden eines linearen Liniencomplexes besteht nämlich eine eindeutige Beziehung.[1]) In der Liniengeometrie besteht zwischen den sechs Grössen p_i die Bedingung:

$$P = p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0,$$

in der Kugelgeometrie zwischen den fünf Grössen s_i die Relation:

$$S = \sum_1^5 s_i^2 = 0.$$

Setzt man:

$$\begin{aligned} p_1 &= \varrho(s_1 + s_2 i) & p_4 &= \varrho(s_1 - s_2 i) \\ p_2 &= \varrho(s_3 + s_4 i) & p_5 &= \varrho(s_3 - s_4 i) \\ p_3 &= \varrho s_5 & p_6 &= \varrho s_5, \end{aligned}$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfactor ist, so wird P in S transformirt.

Es ergiebt sich dann:

$$\begin{aligned} \varrho s_1 &= \frac{p_1 + p_4}{2} & \varrho s_2 &= \frac{p_4 - p_1}{2} i \\ \varrho s_3 &= \frac{p_2 + p_5}{2} & \varrho s_4 &= \frac{p_5 - p_2}{2} i \\ \varrho s_5 &= \frac{p_3 + p_6}{2} = p_3 = p_6. \end{aligned}$$

Man ersieht also, jedem Punkt mit pentasphärischen Coordinaten s_i entspricht eindeutig eine Gerade des allgemeinen linearen Complexes $p_3 = p_6$, umgekehrt bildet sich jede Gerade dieses Complexes, aber auch keine Gerade eines anderen Complexes, in einen Punkt des R_3 ab. Da jeder allgemeine Complex sich in die Form $p_3 = p_6$ bringen lässt, so ist der Satz von der eindeutigen Abbildung der Punkte des R_3 in die Geraden eines linearen Complexes bewiesen.

---

[1]) Auf diese Abbildung hat Herr Nöther: Zur Theorie der algebraischen Functionen, Göttinger Nachrichten 1869, zuerst aufmerksam gemacht. Vergl. Lie, Annalen V, p. 183 und 184.

Bei unserer Abbildung bilden sich zwei Punkte mit den Coordinaten s_i und s_i', die von einander verschwindende Distanz haben, in zwei sich schneidende Geraden ab, da sich die Polarformen in einander transformiren. Bei den conformen Punkttransformationen gingen zwei Punkte, die verschwindende Distanz haben, in analoge über, daher gehen vermöge der Abbildung zwei sich schneidende Geraden bei dieser Transformation in zwei sich schneidende Geraden über. Durch unsere Abbildung entsprechen allen Punkttransformationen, bei denen Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen statthat, alle collinearen und dualistischen Raumtransformationen, die den allgemeinen linearen Complex $p_3 = p_6$ in sich überführen. Mit der Transformation von $S = 0$ in sich, ist die gleichzeitige Transformation von $P = 0$ und $p_3 = p_6$ verbunden. Bleibt in der Darboux'schen Kugelgeometrie eine Kugel beziehentlich Ebene fest, so in der Liniengeometrie ein allgemeiner linearer Complex, der $p_3 = p_6$ in einer Congruenz schneidet. Einer Tangentialmannigfaltigkeit in den s, d. h. einem Punkte, entspricht eine Gerade, die $p_3 = p_6$ angehört.

Man bemerke noch, dass sich die Gleichung jeder Kugel

$$\sum_{i=1}^{i=5} m_i s_i = 0,$$

in die Form

$$\sum_{i=1,2,4,5} m_i' p_i + m'(p_3 + p_6) = 0$$

bringen lässt, wo m' feste Constanten sind, die sich aus den m vermöge der Abbildung ergeben, der angeführte Complex ist zu $p_3 = p_6$ involutorisch.

Nr. 1 p. 49 und 54 in die Sprache der Liniengeometrie übersetzt, giebt: Es wird $p_6 = p_3$ in sich transformirt, ferner die Congruenz, in welcher der zu $p_6 = p_3$ involutorische allgemeine Complex $p_3 + p_6 = 0$ den ersteren trifft, sowie vier Geraden dieser Congruenz. Dieser Fall ist der Fall Nr. 1 p. 30 und 39 in der Liniengeometrie, wenn man die Correlation nicht mehr allgemein, sondern nur als Transformation eines linearen Complexes in sich betrachtet.

Analog sind die übrigen Fälle der Darboux'schen Kugelgeometrie in die Liniengeometrie zu übertragen. Die in der Darboux'schen Kugelgeometrie festbleibenden Cykliden übertragen sich in Complexe zweiten Grades; diese

schneiden $p_6 = p_3$ in einer Congruenz erster Ordnung zweiter Klasse. Daher erfüllen die Geraden des Complexes $p_6 = p_3$, die von ihren zugeordneten geschnitten werden, eine Congruenz erster Ordnung zweiter Klasse; diese wird durch die Transformation in sich übergeführt.

§ 11.

Die Lie'sche Kugelgeometrie und die Berührungstransformationen.

Im Anschluss an die Darboux'sche Kugelgeometrie kann man die Transformation einer Form in sich, die wir für den Fall von sechs Variablen für die Plücker'sche Liniengeometrie interpretirten, für $n = 6$ von einem neuen Standpunkte aus, nämlich dem der Lie'schen Kugelgeometrie beleuchten. Wie Plücker die Gerade, so hat Herr Lie die Kugel als Raumelement eingeführt.[1]) Sei

$$\sum_{i=1}^{i=5} m_i s_i = 0$$

die Gleichung einer Kugel in pentasphärischen Coordinaten, so bestimmen die fünf Grössen $m_1, m_2 \ldots m_5$ die Kugel; es empfiehlt sich aber, diesen fünf Grössen eine sechste m_6 beizufügen, welche durch die Relation

$$i m_6 = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=5} m_k^2},$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist, bestimmt ist. Zwischen den sechs Coordinaten $m_1, m_2 \ldots m_6$ einer Kugel besteht dann die symmetrische Relation:

$$M = \sum_{k=1}^{k=6} m_k^2 = 0 .$$

Umgekehrt kann man stets sechs Grössen, zwischen denen die quadratische Relation $M = 0$ statthat, als Lie'sche Kugelcoordinaten auffassen.

Aus den sechs Grössen $m_1 \ldots m_6$ bestimmen sich die rechtwinkeligen Coordinaten $X Y Z$ des Kugelcentrums, sowie der Kugelradius H:

$$X = \frac{m_3}{m_1 + i m_2}, \quad Y = \frac{m_4}{m_1 + i m_2}, \quad Z = \frac{m_5}{m_1 + i m_2}, \quad H = \frac{i m_6}{m_1 + i m_2}.$$

[1]) S. Lie: Annalen V, p. 170 flg. Herr Lie bedient sich der vier Grössen $X Y Z H$, wo $X Y Z$ Coordinaten des Kugelmittelpunktes und H Kugelradius ist, als Kugelcoordinaten. Unsere Bestimmung durch die m_i stammt von Herrn Darboux: Surfaces p. 227.

Hierzu fügen wir noch die Potenz:

$$p = X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2 = -\frac{m_1 - i m_2}{m_1 + i m_2}.$$

Degenerirt die Kugel in einen Punkt, so ist $m_6 = 0$.

Die Polarform:

$$\sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial M}{\partial m_i} m_i' = 0$$

hat auch in der Lie'schen Kugelgeometrie eine geometrische Bedeutung; sie sagt aus, dass sich die zwei Kugeln mit den Coordinaten m_i und m_i' berühren.

Eine jede lineare Gleichung zwischen den m_i etwa

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_i m_i = 0,$$

wo die a_i beliebige Constanten sind, stellt die Gesammtheit aller Kugeln dar, die eine feste Kugel unter constantem Winkel schneiden. Verschwindet

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_i^2,$$

so haben wir einen speciellen Linearkugelcomplex; er wird von den ∞^3 Berührkugeln einer festen Kugel, die wir als Leitkugel bezeichnen, gebildet.

Sind zwei lineare Kugelcomplexe:

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_i m_i = 0$$

und

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_i' m_i = 0$$

gegeben, so haben diese eine simultane Invariante, sie ist

$$\sum_{i=1}^{i=6} a_i a_i',$$

ihr Verschwinden drückt eine Beziehung zwischen den zwei Kugelcomplexen aus; wir erlauben uns, analog wie bei Liniencomplexen, diese Beziehung als Involution zu bezeichnen. Sind die zwei Complexe speciell, so liegen sie involutorisch, wenn ihre Leitkugeln sich berühren. Ist hingegen nur ein

Complex speciell, so gehört bei involutorischer Lage die Leitkugel des speciellen Complexes zu den Kugeln des allgemeinen.

In der Lie'schen Kugelgeometrie kann man dem Complex zweiten Grades eine einfache geometrische Bedeutung geben. Eine Gleichung zweiten Grades zwischen den m_i ist eine Gleichung zweiten Grades zwischen $XYZHp$, also zwischen $X^2+Y^2+Z^2$, X, Y, Z, H^2, H. Betrachtet man in dieser Gleichung H als constant, so giebt sie den Ort für das Centrum aller Kugeln des Complexes, die den constanten Radius H haben; dieser Ort ist eine Cyklide, die von H abhängt. Ein Kugelcomplex zweiten Grades besteht aus einer unendlichen Anzahl Kugeln von beliebigem Radius H; alle Kugeln vom gleichen Radius H sind so beschaffen, dass ihre Centra auf einer Cyklide liegen, die vom Werthe H des Kugelradius abhängt.

Wir geben jetzt den von Herrn Lie stammenden fundamentalen Zusammenhang zwischen Linien- und Kugelgeometrie, d. h. die Transformation der Bedingungsgleichung $P = 0$ in $M = 0$.

Man setze:

$$p_1 = m_1 + i m_2 \qquad p_4 = m_1 - i m_2$$
$$p_2 = m_3 + i m_4 \qquad p_5 = m_3 - i m_4$$
$$p_3 = m_5 + i m_6 \qquad p_6 = m_5 - i m_6 ,$$

dann wird $p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$ in $\sum_1^6 m_i^2 = 0$ transformirt.

Es ist:

$$m_1 = \frac{p_1 + p_4}{2} \qquad m_2 = i\frac{p_4 - p_1}{2}$$
$$m_3 = \frac{p_2 + p_5}{2} \qquad m_4 = i\frac{p_5 - p_2}{2}$$
$$m_5 = \frac{p_3 + p_6}{2} \qquad m_6 = i\frac{p_6 - p_3}{2} .$$

Sind $m_1, m_2 \ldots m_5$, welche die Kugel schon eindeutig bestimmen, gegeben, so ist m_6 nicht eindeutig bestimmt, sondern es kann positives oder negatives Zeichen haben. Hieraus folgt: Vermöge unserer Abbildung entspricht jeder Kugel ein Geradenpaar, bei dem nur die Coordinaten p_3 und p_6 vertauscht sind. Jeder Geraden entspricht hingegen eindeutig eine Kugel.

Da

$$\sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial P}{\partial p_i} p'_i = 0$$

in

$$\Sigma \frac{\partial M}{\partial m_i} m'_i = 0$$

transformirt wird, so gehen zwei sich berührende Kugeln in zwei Geradenpaare über, deren gegenseitige Lage eine solche ist, dass jede Gerade des einen Paares eine Gerade des zweiten schneidet. Zwei sich schneidende Geraden bilden sich umgekehrt in zwei sich berührende Kugeln ab. Wir haben daher in unseren Coordinaten auch die von Herrn Lie studirte Abbildung und können alle von ihm angewandten Schlüsse benützen.[1])

Linearen Transformationen der p_i entsprechen jetzt lineare Transformationen der m_i; wir können daher den Satz aussprechen:

„Unterwirft man die m_i linearen Substitutionen, bei denen

$$\sum_{1}^{6} m_i^2 = 0$$

in sich übergeht, so hat man die Gruppe aller Kugeltransformationen, bei denen Berührung längs Krümmungslinien eine invariante Beziehung ist."

$M = 0$ in Bezug auf Hermite'sche Transformationen discutiren, heisst nichts anderes als die Gruppe der oben genannten Kugeltransformationen studiren. Diese Gruppe ist sehr allgemein, sie umfasst Bewegungen, Parallelтransformationen — darunter den Uebergang von einer Fläche zu einer Parallelfläche verstanden — eine von Ossian Bonnet angegebene reciproke Umformung, Transformationen durch reciproke Radien u. s. w.

Bei der Diskussion von $M = 0$ braucht keine neue Betrachtung angestellt zu werden; man kann vermöge unserer Abbildung alle in der Plücker'schen Liniengeometrie gefundenen Resultate direct übertragen. Es muss aber noch bemerkt werden, dass der geometrische Unterschied zwischen eigentlichen und uneigentlichen Transformationen sich verwischt.

---

[1]) Annalen V, p. 180 flg. Einen von dem dort gegebenen abweichenden Beweis hat Lie in den Göttinger Nachrichten 1871: „Zur Theorie eines Raumes von n Dimensionen" gegeben. Er betrachtet dort die conformen Transformationen des R_n und zeigt, dass sie im R_{n-1} Berührungstransformationen sind.

Wir verzichten auf die Uebertragung der in der Plücker'schen Liniengeometrie gefundenen Resultate in die Sprache der Lie'schen Kugelgeometrie, nur der Fall Nr. 1 p. 39 soll als Beispiel übersetzt werden. Entsprechend den zwei linearen involutorischen Liniencomplexen bleiben zwei allgemeine involutorische Kugelcomplexe fest. Die vier speciellen linearen Liniencomplexe, die fest bleiben, transformiren sich in vier specielle Kugelcomplexe, die zu den zwei allgemeinen Complexen involutorisch liegen, daher gehören ihre vier Leitkugeln der von den zwei allgemeinen Complexen constituirten Kugelcongruenz an. Da die vier Achsen der vier speciellen Liniencomplexe vier Kanten eines Tetraeders sind, so berühren sich die vier Leitkugeln zu je zwei, die zwei übrigen Tetraederkanten bilden sich in ein Paar Kugeln ab, welche die vier Leitkugeln berühren. Während die zuerst betrachteten vier Leitkugeln bei der Transformation festbleiben, vertauschen sich die zwei Kugeln, welche sie berühren.

Analog erledigen sich die übrigen Fälle.

Die von uns in der Liniengeometrie angegebenen festbleibenden Complexe zweiten Grades übertragen sich in die Kugelcomplexe zweiten Grades, diese werden aus der Gesammtheit der Kugeln gebildet, die von den ihnen entsprechenden berührt werden.

Es ist mir noch eine angenehme Pflicht, auch an dieser Stelle Herrn Professor Lindemann meinen tiefgefühlten, ehrerbietigen Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und das lebhafte Interesse, das er an ihrem Fortgange nahm, auszudrücken.

München, im April 1894.